

2022-2023 年度苏锡常镇高三教学情况调研(一)

数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答字写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup \complement_{\mathbf{R}} B =$
A. $\{x | x < 2\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | x \leq 1\}$ D. $\mathbf{R}$
2. 两个粒子 A, B 从同一发射源发射出来, 在某一时刻, 它们的位移分别为 $\mathbf{s}_A = (4, 3)$, $\mathbf{s}_B = (-2, 6)$, 则 $\mathbf{s}_B$ 在 $\mathbf{s}_A$ 上的投影向量的长度为
A. 10 B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. 2
3. “绿水青山, 就是金山银山”, 随着我国的生态环境越来越好, 外出旅游的人越来越多。现有两位游客慕名来江苏旅游, 他们分别从“太湖鼋头渚、苏州拙政园、镇江金山寺、常州恐龙园、南京夫子庙、扬州瘦西湖”这 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩。记事件 A 为“两位游客中至少有一人选择太湖鼋头渚”, 事件 B 为“两位游客选择的景点不同”, 则 $P(B|A) =$
A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{9}{11}$ D. $\frac{10}{11}$
4. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 1, 点 O 为底面 ABC 的中心, 球 O 与该正四面体的其余三个面都有且只有一个公共点, 且公共点非该正四面体的顶点, 则球 O 的半径为
A. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x + \sin x$, 则不等式 $f(2x-1) < e^\pi$ 的解集是
A. $(\frac{1+\pi}{2}, +\infty)$ B. $(0, \frac{1+\pi}{2})$ C. $(0, \frac{1+e^\pi}{2})$ D. $(\frac{1-\pi}{2}, \frac{1+\pi}{2})$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点 D , $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle ADC$ 面积的 3 倍, 则 $\tan B =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{6-\sqrt{3}}{33}$

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 点 P, Q 在直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 上, $FP \perp FQ$, O

为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OF}^2$, 则该椭圆的离心率为

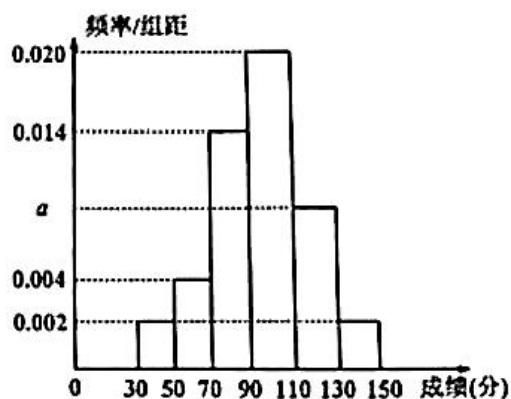
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 若对任意正整数 n , $S_{n+1} = -3a_{n+1} + a_n + 3$, $S_n + a_n > (-1)^n a$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-1, \frac{3}{2})$ B. $(-1, \frac{5}{2})$ C. $(-2, \frac{5}{2})$ D. $(-2, 3)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某校 1000 名学生在高三一模测试中数学成绩的频率分布直方图如图所示(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)，分数不低于 X 即为优秀，已知优秀学生有 80 人，则



(第 9 题图)

- A. $a = 0.008$ B. $X = 120$ 成绩(分)
 C. 70 分以下的人数约为 6 人 D. 本次考试的平均分约为 93.6
10. 已知正数 a, b 满足 $ab = a + b + 1$, 则
- A. $a + b$ 的最小值为 $2 + 2\sqrt{2}$ B. ab 的最小值为 $1 + \sqrt{2}$
 C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $2\sqrt{2} - 2$ D. $2^a + 4^b$ 的最小值为 $16\sqrt{2}$
11. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \cos \omega x (\omega > 0)$, 则下列结论正确的有
- A. 将函数 $y = 2\sin \omega x$ 的图象向左平 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 总能得到 $y = f(x)$ 的图象
 B. 若 $\omega = 3$, 则当 $x \in [0, \frac{2\pi}{9}]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $[1, 2]$

C. 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上恰有 3 个极大值点, 则 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{19}{6}$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12})$ 上单调递减, 则 $1 \leq \omega \leq \frac{16}{5}$

12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3, E, F 分别是棱 B_1C_1, C_1D_1 上的动点, 满足 $D_1F = C_1E$, 则

A. BF 与 DE 垂直

B. BF 与 DE 一定是异面直线

C. 存在点 E, F , 使得三棱锥 $F-A_1BE$ 的体积为 $\frac{15}{4}$

D. 当 E, F 分别是 B_1C_1, C_1D_1 的中点时, 平面 AEF 截正方体所得截面的周长为 $3\sqrt{13} + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将答案填写在答题卡相应的位置上.

13. $(2 - \frac{1}{x})(x-2)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$, BE 与 AD 交于点 O . 若 $\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CA}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x+y =$ _____.

15. 已知圆 $C: x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$, 过点 $T(2, 0)$ 的直线 l 交圆 C 于 A, B 两点, 点 P 在圆 C 上, 若 $CP \parallel AB$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$, 则 $|AB| =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = xe^x - e^x - x$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 函数 $g(x) = x \ln x - \ln x - x$ 的两个零点为 x_3, x_4 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_2 + a_3 + a_4 = 39$, $a_5 = 2a_4 + 3a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{n}{a_n}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $1 + \sin 2A = (3 \tan B + 2) \cos 2A$.

(1) 若 $C = \frac{3\pi}{4}$, 求 $\tan B$ 的值;

(2) 若 $A = B$, $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

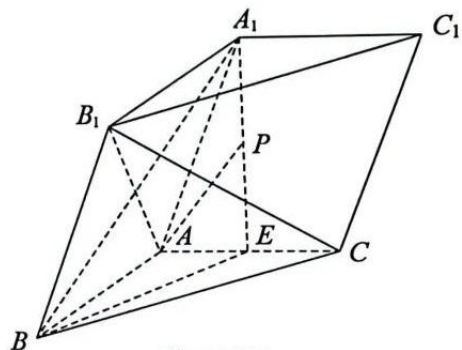
19. (12 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1B_1BA \perp$ 平面 ABC , 侧面 A_1B_1BA 为菱形, $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$, A_1B

$\perp AC$, $AB=AC=2$, E 是 AC 的中点.

(1) 求证: $A_1B \perp$ 平面 AB_1C ;

(2) 点 P 在线段 A_1E 上(异于点 A_1, E), AP 与平面 A_1BE 所成角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 $\frac{EP}{EA_1}$ 的值.



(第 19 题图)

20. (12 分)

某小区有居民 2000 人, 想通过验血的方法筛查出乙肝病毒携带者, 为此需对小区全体居民进行血液化验, 假设携带病毒的居民占 $a\%$, 若逐个化验需化验 2000 次. 为减轻化验工作量, 随机按 n 人一组进行分组, 将各组 n 个人的血液混合在一起化验, 若混合血样呈阴性, 则这 n 个人的血样全部阴性; 若混合血样呈阳性, 说明其中至少有一人的血样呈阳性, 就需对每个人再分别单独化验一次. 假设每位居民的化验结果呈阴性还是阳性相互独立.

(1) 若 $a=0.2$, $n=20$, 试估算该小区化验的总次数;

(2) 若 $a=0.9$, 每人单独化验一次花费 10 元, n 个人混合化验一次花费 $n+9$ 元. 求 n 为何值时, 每位居民化验费用的数学期望最小.

(注: 当 $p < 0.01$ 时, $(1-p)^n \approx 1-np$.)

21. (12 分)

已知直线 l 与抛物线 $C_1: y^2=2x$ 交于两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 与抛物线 $C_2: y^2=4x$ 交于两点 $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, 其中 A, C 在第一象限, B, D 在第四象限.

(1) 若直线 l 过点 $M(1, 0)$, 且 $\frac{1}{|BM|} - \frac{1}{|AM|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求直线 l 的方程;

(2) ① 证明: $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$;

② 设 $\triangle AOB$, $\triangle COD$ 的面积分别为 S_1, S_2 (O 为坐标原点), 若 $|AC|=2|BD|$, 求 $\frac{S_1}{S_2}$.

22. (12 分)

已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的两个函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$, $g(x)=\ln x$.

(1) 求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值;

(2) 设直线 $y=-x+t$ ($t \in \mathbf{R}$) 与曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 分别交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的最小值.

2022~2023 学年度苏锡常镇四市高三教学情况调研(一)

数学参考答案

2023.3

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A 2. D 3. D 4. B 5. D 6. A 7. B 8. C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. AD 10. AC 11. BC 12. ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -200 14. $\frac{3}{5}$ 15. $\sqrt{15}$ 16. 2

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

则 $a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 39$, $a_1q^4 = 2a_1q^3 + 3a_1q^2$,1 分

因为 $a_1q \neq 0$, 所以 $q^2 - 2q - 3 = 0$,2 分

即 $(q+1)(q-3) = 0$,

因为 $q > 0$, 所以 $q = 3$, 则 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = 3^{n-1}$;4 分

(2) 因为 $a_n = 3^{n-1}$, 所以 $b_n = \frac{n}{3^{n-1}}$, 所以 $T_n = \frac{1}{3^0} + \frac{2}{3^1} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}}$, ①

$\frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$, ②6 分

①-②得 $\frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2 \cdot 3^n}$,8 分

所以 $T_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^{n-1}}$10 分

18. 解：(1) 若 $C = \frac{3\pi}{4}$, 则 $A + B = \frac{\pi}{4}$,

因为 $1 + \sin 2A = (3 \tan B + 2) \cos 2A$,

所以 $1 + \sin(\frac{\pi}{2} - 2B) = (3 \tan B + 2) \cos(\frac{\pi}{2} - 2B)$,1 分

所以 $1 + \cos 2B = (3 \tan B + 2) \sin 2B$,2 分

所以 $3 \tan^2 B + 2 \tan B - 1 = 0$,4 分

所以 $\tan B = \frac{1}{3}$ 或 $\tan B = -1$,

因为 $0 < B < \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan B = \frac{1}{3}$6 分

(2) 若 $A = B$, 则 $\frac{1 + \sin 2A}{\cos 2A} = 3 \tan A + 2$, 所以 $\frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} = 3 \tan A + 2$,8 分

得 $3 \tan^2 A = 1$, 所以 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (负的舍去),

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = B = \frac{\pi}{6}$,10 分

又 $c = 2$, 所以 AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$12 分

19. (1) 证明: 因为侧面 ABB_1A_1 为菱形, 所以 $A_1B \perp AB_1$,1 分

又因为 $A_1B \perp AC$, $AC \cap AB_1 = A$,

所以 $A_1B \perp$ 平面 AB_1C4 分

(2) 法一: 取 AB 的中点 O , 连接 B_1O ,

因为 $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABB_1$ 为等边三角形, 所以 $B_1O \perp AB$5 分

因为平面 $A_1B_1BA \perp$ 平面 ABC , 平面 $A_1B_1BA \cap$ 平面 $ABC = AB$, $B_1O \subset$ 平面 A_1B_1BA ,

所以 $B_1O \perp$ 平面 ABC ,6 分

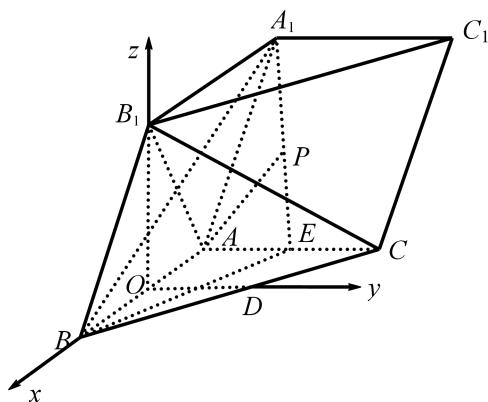
所以 $B_1O \perp AC$, 又因为 $A_1B \perp AC$,

$B_1O \cap AB = O$,

所以 $AC \perp$ 平面 A_1B_1BA7 分

以 O 为原点, OB, OD, OB_1 ($OD \parallel AC$) 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的

空间直角坐标系. 则 $B(1, 0, 0)$, $A(-1, 0, 0)$, $A_1(-2, 0, \sqrt{3})$, $E(-1, 1, 0)$, 所以



$$\overrightarrow{BA_1} = (-3, 0, \sqrt{3}), \quad \overrightarrow{BE} = (-2, 1, 0). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 A_1BE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = -3x + \sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = -2x + y = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } x = 1, \text{ 得 } z = \sqrt{3}, y = 2,$$

$$\text{所以平面 } A_1BE \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{n} = (1, 2, \sqrt{3}). \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

又 P 在线段 A_1E 上, 设 $\overrightarrow{EP} = \lambda \overrightarrow{EA_1}$ ($0 < \lambda < 1$), $P(x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{所以 } (x_1 + 1, y_1 - 1, z_1) = \lambda(-1, -1, \sqrt{3}),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 = -1 - \lambda, \\ y_1 = 1 - \lambda, \\ z_1 = \sqrt{3}\lambda, \end{cases} \quad \text{所以 } P(-1 - \lambda, 1 - \lambda, \sqrt{3}\lambda), \quad \text{所以 } \overrightarrow{AP} = (-\lambda, 1 - \lambda, \sqrt{3}\lambda).$$

因为 AP 与平面 A_1BE 所成角大小为 $\frac{\pi}{4}$,

$$\text{所以 } \sin \frac{\pi}{4} = |\cos \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AP}| |\mathbf{n}|} = \frac{|-\lambda + 2 - 2\lambda + 3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 3\lambda^2} \sqrt{8}}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 5\lambda^2 - 2\lambda = 0, \text{ 即 } \lambda = \frac{2}{5} \text{ 或 } \lambda = 0 \text{ (舍)}, \text{ 即 } \frac{EP}{EA_1} = \frac{2}{5}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法二: 设 $A_1B \cap AB_1 = F$, 因为 $A_1B \perp$ 平面 AB_1C ,

所以平面 $A_1BE \perp$ 平面 AB_1C , $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

EF 为交线, 由法一得 $AC \perp$ 平面 A_1B_1BA , $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{所以 } AE = AF = 1, \quad EF = \sqrt{2},$$

$$\text{过 } A \text{ 作 } AH \perp EF \text{ 于 } H, \text{ 则 } AH = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为 AP 与平面 A_1BE 所成角大小为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $AP = 1$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{在 } \triangle AEA_1 \text{ 中, 可计算得 } EP = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } \frac{EP}{EA_1} = \frac{2}{5}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 设每位居民需化验的次数为 X

若混合血样呈阴性, 则 $X = \frac{1}{20}$, 若混合血样呈阳性, 则 $X = \frac{21}{20}$,2 分

所以 X 的分布列为:

$$P(X = \frac{1}{20}) = 0.998^{20}, \quad P(X = \frac{21}{20}) = 1 - 0.998^{20}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{20} \times 0.998^{20} + \frac{21}{20} (1 - 0.998^{20}) = \frac{21}{20} - 0.998^{20} = \frac{21}{20} (1 - 0.002)^{20} \\ &\approx \frac{21}{20} - (1 - 0.002 \times 20) = 0.09, \end{aligned}$$

故 2000 名居民总化验次数约为 $2000 \times 0.09 = 180$ 次.6 分

(2) 设每组 n 人总费用为 Y 元, 若混合血样呈阴性则 $Y = n + 9$, 若混合血样呈阳性, 则 $Y = 11n + 9$, 所以, Y 的分布列为:

$$P(Y = n + 9) = 0.991^n, \quad P(Y = 11n + 9) = 1 - 0.991^n, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } E(Y) = (n + 9) \times 0.991^n + (11n + 9)(1 - 0.991^n) = 11n - 10n \times 0.991^n + 9,$$

每位居民的化验费用为:

$$\frac{E(Y)}{n} = 11 - 10 \times 0.991^n + \frac{9}{n} = 11 - 10 \times (1 - 0.009)^n + \frac{9}{n} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\approx 11 - 10 \times (1 - 0.009n) + \frac{9}{n} = 1 + 0.09n + \frac{9}{n} \geq 1 + 2\sqrt{0.09n \cdot \frac{9}{n}} = 2.8 \text{ 元},$$

当且仅当 $0.09n = \frac{9}{n}$, 即 $n = 10$ 时取等号.

故 $n = 10$ 时, 每位居民化验费用的期望最小.12 分

21. 解: (1) 由题意, 设 $l: x = my + 1$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x = my + 1, \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 2my - 2 = 0. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \begin{cases} y_1 + y_2 = 2m, \\ y_1 y_2 = -2, \end{cases} \quad \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = -m.$$

$$\text{由 } \frac{1}{|BM|} - \frac{1}{|AM|} = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}y_2} - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}y_1} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$\text{所以 } \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } m = 1. \text{ 故直线 } l \text{ 的方程为 } y = x - 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) ① 设 $M(t, 0) (t > 0)$, $l: x = my + t$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$,

故 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x = my + t, \end{cases}$ 得 $y^2 - 2my - 2t = 0$, 所以 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -\frac{m}{t}$,

同理可得 $\frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} = -\frac{m}{t}$, 故 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$6 分

② 由①可知 $\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_3} = \frac{1}{y_4} - \frac{1}{y_2} \Leftrightarrow \frac{y_3 - y_1}{y_1 y_3} = \frac{y_2 - y_4}{y_2 y_4}$, 故 $\frac{|y_3 - y_1|}{|y_2 - y_4|} = \frac{|y_1 y_3|}{|y_2 y_4|}$.

注意到 $\frac{|y_3 - y_1|}{|y_2 - y_4|} = \frac{|AC|}{|BD|} = 2$, 以及 $\frac{y_1 y_3}{y_2 y_4} = \frac{y_1 \cdot \frac{-4t}{y_4}}{y_4 \cdot \frac{-2t}{y_1}} = \frac{2y_1^2}{y_4^2} = \frac{2|AM|^2}{|DM|^2}$,

所以 $|AM| = |DM|$, 即 M 为 AD 中点.8 分

所以 $\begin{cases} x_4 = 2t - x_1, \\ y_4 = -y_1, \end{cases}$ 代入抛物线方程,

可得 $\begin{cases} y_1^2 = 2x_1, \\ (-y_1)^2 = 4(2t - x_1), \end{cases} \quad y_1 = \frac{2\sqrt{6t}}{3}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{6t}}{2}.$

由 $y_4 = -y_1 = -\frac{2\sqrt{6t}}{3}$, 以及 $y_3 y_4 = -4t$, 可得 $y_3 = -\sqrt{6t}$10 分

故 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|y_1 - y_2|}{|y_3 - y_4|} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{t} + \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{t}}{\sqrt{6}\sqrt{t} + \frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{t}} = \frac{7}{10}$12 分

22. 解: (1) $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + \frac{1}{4} - \ln x$,

得 $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2})}{x}$,2 分

因此函数 $h(x)$ 得单调递增区间为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

故函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由题意有 $\begin{cases} x_1^2 + \frac{1}{4} = -x_1 + t, \\ \ln x_2 = -x_2 + t, \end{cases} \Rightarrow x_1^2 - \ln x_2 + \frac{1}{4} = x_2 - x_1$.

令 $m = x_2 - x_1$, 故 $x_2 = x_1 + m$, 且 $x_1^2 - \ln(x_1 + m) - m + \frac{1}{4} = 0$.

故方程 $x^2 - \ln(x+m) - m + \frac{1}{4} = 0$ 有解.6 分

令 $\varphi(x) = x^2 - \ln(x+m) - m + \frac{1}{4}$, 故 $\varphi'(x) = 2x - \frac{1}{x+m} = \frac{2x^2 + 2mx - 1}{x+m}$, 容易知道存在

$x_0 > 0$, 函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增, 且 $2x_0^2 + 2mx_0 - 1 = 0$.

所以 $\varphi(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow x_0^2 - \ln(x_0+m) - m + \frac{1}{4} \leq 0$. 注意到 $m = \frac{1}{2x_0} - x_0$,

故 $x_0^2 - \ln \frac{1}{2x_0} - \frac{1}{2x_0} + x_0 + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow x_0^2 + \ln(2x_0) + x_0 - \frac{1}{2x_0} + \frac{1}{4} \leq 0$,8 分

构造函数 $p(x) = x^2 + \ln(2x) + x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$. 因为 $p'(x) = 2x + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2x^2} > 0$,

所以 $p(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} = 0$,

故 $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$, 所以 $m = \frac{1}{2x_0} - x_0 \geq \frac{1}{2}$10 分

所以 $|AB| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2}m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$11 分

此时 $m = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$,

所以当直线 $l: y = -x + 1$, $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B(1, 0)$ 时, $|AB|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$12 分