

高二期中调研试卷

数 学

2026.4

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $A(3, 5, -7)$, $B(-2, 4, 3)$, 则 $\overrightarrow{BA} =$

- A. $(-5, -1, 10)$ B. $(5, 9, -10)$ C. $(5, 1, -10)$ D. $(1, 1, -10)$

2. 已知 $f(x) = \sqrt{x}$, 则 $f'(4) =$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

3. 某高山滑雪运动员在一次滑雪训练中滑行的路程 l (单位: m) 与时间 t (单位: s) 满足关系式 $l(t) = 2t^2 + \frac{3}{2}t$. 当运动员的滑雪路程为 38 m 时, 则运动员此时的滑雪速度是

- A. 17.5 m/s B. 20.5 m/s C. 22 m/s D. 153.5 m/s

4. 线段 AB, BD 在平面 α 内, $BD \perp AB$, $AC \perp \alpha$, 且 $AB = 3$, $BD = 4$, $AC = 5$, 则 C, D 两点间的距离为

- A. 5 B. $\sqrt{34}$ C. $\sqrt{41}$ D. $5\sqrt{2}$

5. 已知 $a = (1, 2, m)$ 在 b 上的投影向量是 $(2, 1, 1)$, 则 $|a| =$

- A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{15}$

6. 点 M 是四面体 $OABC$ 的棱 BC 的中点, 点 N 在线段 OM 上且 $MN = \frac{1}{2}ON$, 点 P 在线段

AN 上且 $AP = \frac{3}{4}AN$, 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 则 $x + y + z =$

- A. $\frac{7}{16}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. 1

7. 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为线段 DD_1 的中点, F 为线段 BB_1 的中点.

则直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离是

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = (x-a)\ln x$ 在区间 $(1, e)$ 上不单调, 则 a 的取值范围是

- A. $0 < a < 1$ B. $a > e$ C. $a > 4$ D. $1 < a < 2e$

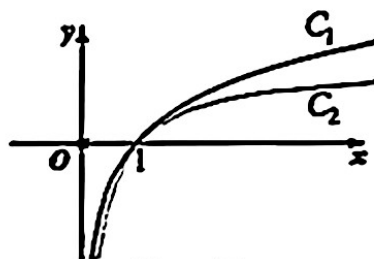
二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分.

9. 若 $\{a, b, c\}$ 构成空间的一个基底, 则下列向量共面的是

- A. $b+c, b, b-c$
B. $a+b, a-b, c$
C. $a+b, a+b+c, c$
D. $a+b+c, a+b, b+c$

10. 设 $x > 0$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 两个函数的图象如图所示, 则

- A. $f(x)$ 的图象是 C_1 , $g(x)$ 的图象是 C_2
B. $f(x)$ 的图象是 C_2 , $g(x)$ 的图象是 C_1
C. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\ln x > 2(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})$
D. $\ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1}$

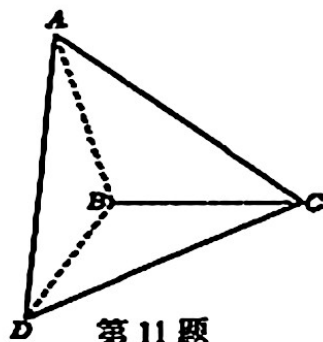


第10题

11. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 二面角 $A-BC-D$ 的大小为 α , 且 $AB = BC = BD = 2$,

$\angle ABC = \angle DBC = 120^\circ$, 则

- A. 无论 α 为何值, $BC \perp AD$
B. 当 AD 与平面 BCD 所成角为 45° 时, $\alpha = 90^\circ$
C. 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 二面角 $A-CD-B$ 大于 60°
D. 当 $\alpha = 120^\circ$ 时, 二面角 $A-CD-B$ 的正切值为 $\frac{2}{3}$



第11题

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 设函数 $f(x) = x^2 - 1$ ，当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，函数的平均变化率为 ▲。

13. PA, PB, PC 是从点 P 出发的三条射线，每两条射线的夹角均为 60° ，那么直线 PC 与平面 PAB 所成角的正切值是 ▲。

14. 已知 $a > 0, b > 0$ ，若函数 $f(x) = a \ln x - x - be^{x-1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减，则 $\frac{b^2 + a}{e^b}$ 的最大值是 ▲。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

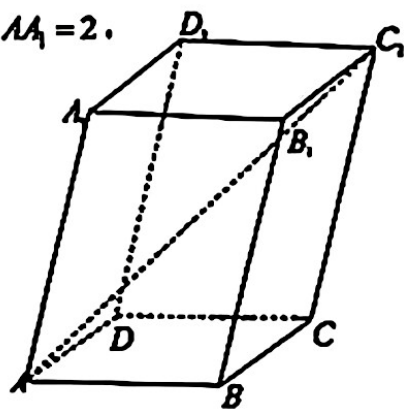
15. (13 分)

如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AD = AA_1 = 2$ 。

$\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = \angle BAD = 60^\circ$ 。

(1) 用 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 表示 $\overrightarrow{AC_1}$ ，并求 AC_1 的长；

(2) 求证： $A_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 。



第 15 题

▲ ▲ ▲

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的极值；

(2) 若对任意 $x_1, x_2 \in [-3, 3]$ ，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M$ 恒成立，求实数 M 的最小值；

(3) 若过点 $(0, \frac{5}{6})$ 的直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 相切，求 l 的方程。

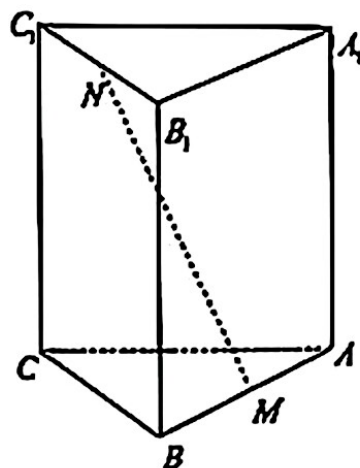
▲ ▲ ▲

17. (15 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, $AA_1 = 3$, M 是 AB 的中点, N 是 B_1C_1 的中点.

- (1) 求 MN 与 CC_1 所成角的余弦值;
- (2) 求平面 A_1MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值;
- (3) 记 P 是 BC_1 与 B_1C 的交点, 在线段 A_1N 上是否存在点 Q , 使得 $PQ \parallel$ 平面 A_1CM ? 若存在, 求出 $\frac{A_1Q}{A_1N}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

▲ ▲ ▲



第 17 题

18. (17 分)

现有一块半径为 R 的圆形铁皮, 开展如下设计与优化问题:

- (1) 若从该圆形铁皮中剪出一个内接等腰三角形 (三角形的三个顶点均在圆周上), 试问: 当等腰三角形的顶角 θ 取何值时, 该三角形的面积取得最大值?
- (2) 若从该圆形铁皮中剪出一个圆心角为 α 的扇形 (扇形的顶点与圆心重合, 弧长对应圆周上的一段弧), 并将该扇形制作成一个无盖的圆锥形容器 (扇形的两条半径作为圆锥的母线, 弧长作为圆锥底面的周长), 试问: 当扇形的圆心角 α 取何值时, 该圆锥形容器的容积取得最大值?

▲ ▲ ▲

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + (2-a)x$, $g(x) = ax^2$.

- (1) 当 $a=1$ 时,

- ① 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线;
- ② 是否存在实数 m, n 使得不等式 $f(x) \leq mx+n \leq g(x)$ 恒成立, 若存在, 求出 m, n 的值; 若不存在, 说明理由.

- (2) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个不同的交点, 求实数 a 的取值范围.

▲ ▲ ▲

数 学 参 考 答 案

2026.4

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	A	D	B	B	A	D

二、多项选择题

题号	9	10	11
答案	AC	ACD	ABD

三、填空题

12. 2.1

13. $\sqrt{2}$ 14. $\frac{3}{e}$

四、解答题

15. (13 分)

解 (1) $\overline{AC_1} = \overline{AD_1} + \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{AA_1} + \overline{AB}$, 3 分

$$\therefore \overline{AC_1}^2 = (\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AA_1}^2 + 2(\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{AA_1} + \overline{AD} \cdot \overline{AA_1})$$

$$= 4 + 4 + 4 + 2 \cdot (2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2}) = 24.$$

所以 $|\overline{AC_1}| = 2\sqrt{6}$ 6 分

$$(2) \text{ 因为 } \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}, \quad \overline{A_1C} = \overline{AC} - \overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AA_1},$$

$$\text{所以 } \overline{A_1C} \cdot \overline{BD} = (\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AA_1}) \cdot (\overline{AD} - \overline{AB}) = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AA_1} \cdot \overline{AD} + \overline{AA_1} \cdot \overline{AB} = 0,$$

所以 $A_1C \perp BD$ 9 分

$$\text{又因为 } \overline{A_1C} \cdot \overline{BB_1} = \overline{AA_1} \cdot (\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AA_1}) = \overline{AA_1} \cdot \overline{AB} + \overline{AA_1} \cdot \overline{AD} - \overline{AA_1}^2 = 0,$$

所以 $A_1C \perp BB_1$ 12 分又因为 $BD \cap BB_1 = B$, 所以 $A_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 13 分

16. (15 分)

解: (1) $f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, 1 分

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,
..... 3 分

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1) = \frac{13}{6}$, 极小值 $f(2) = -\frac{7}{3}$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, 4)$ 上单调递增, 又因为 $f(-3) = -\frac{13}{2}$, $f(-1) = \frac{13}{6}$, $f(2) = -\frac{7}{3}$, $f(3) = -\frac{1}{2}$,

所以当 $x = -3$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{13}{2}$; 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{13}{6}$ 7 分

所以 $M \geq \frac{26}{3}$ 9 分

(3) 设曲线 $y = f(x)$ 上一点 (x_0, y_0) , 则该点处的切线是 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

因为曲线 $y = f(x)$ 的切线过点 $(0, \frac{5}{6})$,

所以 $\frac{5}{6} - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$, 12 分

即: $4x_0^3 - 3x_0^2 - 1 = 0$, 即 $(x_0 - 1)(4x_0^2 + x_0 + 1) = 0$.

因为 $4x_0^2 + x_0 + 1 = 0$ 无解,

所以 $x_0 = 1$ 14 分

所以切线方程为: $y = -x + \frac{5}{6}$ 15 分

17. (15 分)

解: (1) 如图, 分别以 AC, AB, AA_1 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

所以 $A_1(0, 0, 3), C_1(2, 0, 3), C(2, 0, 0), M(0, 1, 0), N(1, 1, 3), P(1, 1, \frac{3}{2})$.

..... 1 分

$\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 3), \overrightarrow{MN} = (1, 0, 3)$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{MN} \rangle = \frac{\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{CC_1}| |\overrightarrow{MN}|} = \frac{9}{3 \times \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

所以 MN 与 CC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 4 分

(2) 平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $n_1 = (0, 1, 0)$, 5 分

设平面 A_1MN 的一个法向量为 $n_2 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{MN} = (1, 0, 3)$, $\overrightarrow{A_1N} = (1, 1, 0)$,

由 $n_2 \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, $n_2 \cdot \overrightarrow{A_1N} = 0$, 所以 $\begin{cases} x_0 + 3z_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \end{cases}$, 不妨取 $x_0 = 3$, 则 $n_2 = (3, -3, -1)$,

..... 7 分

$$\text{所以 } \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{-3}{1 \times \sqrt{19}} = -\frac{3\sqrt{19}}{19},$$

所以平面 A_1MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{190}}{19}$ 10 分

(3) 方法 1: 设 $Q(a, a, 3)$, 则 $\overrightarrow{A_1C} = (2, 0, -3)$, $\overrightarrow{A_1M} = (0, 1, -3)$, $\overrightarrow{PQ} = (a-1, a-1, \frac{3}{2})$.

设面 A_1CM 的法向量 $n_3 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1C} \cdot n_3 = 0, \\ \overrightarrow{A_1M} \cdot n_3 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x - 3z = 0, \\ y - 3z = 0. \end{cases}$

令 $z = 1$ 得 $n_3 = (\frac{3}{2}, 3, 1)$ 12 分

因为 $PQ \parallel$ 平面 A_1CM , 所以 $\overrightarrow{PQ} \perp n_3$, 即 $\overrightarrow{PQ} \cdot n_3 = 0$.

所以 $\frac{3}{2}(a-1) + 3(a-1) + \frac{3}{2} = 0$, 得 $a = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{A_1Q} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)$, 所以 $|\overrightarrow{A_1Q}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $A_1N = \sqrt{2}$, 所以当 $\frac{A_1Q}{A_1N} = \frac{1}{3}$ 时, $PQ \parallel$ 平面 A_1CM 15 分

方法 2: 设 $Q(a, a, 3)$, 则 $\overrightarrow{A_1C} = (2, 0, -3)$, $\overrightarrow{A_1M} = (0, 1, -3)$, $\overrightarrow{PQ} = (a-1, a-1, \frac{3}{2})$.

设 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{A_1C} + \mu \overrightarrow{A_1M}$, 所以 $\begin{cases} a-1 = 2\lambda, \\ a-1 = \mu, \\ \frac{3}{2} = -3\lambda - 3\mu, \end{cases}$ 12 分

所以 $a = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{A_1Q} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)$, 所以 $|\overrightarrow{A_1Q}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $A_1N = \sqrt{2}$, 所以当 $\frac{A_1Q}{A_1N} = \frac{2}{3}$ 时, $PQ \parallel$ 平面 A_1CM 15 分

因为 $(x-1)^2 \geq 0$, 所以 $x^2 \geq 2x-1$, 所以 $2x-1 \leq g(x)$.

所以 $f(x) \leq 2x-1 \leq g(x)$ 8 分

法二: 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ 单调递减, 所以 $y = f(x)$ 的图象呈“上凸”递增, 所以 $y = mx + n$ 是曲线 $y = f(x)$ 的“上切线”或在“上切线”的上方.

设 $y = f(x)$ 上一点为 $(x_1, f(x_1))$, 该点处的切线是 $y = (\frac{1}{x_1} + 1)(x - x_1) + \ln x_1 + x_1$,

所以 $m = \frac{1}{x_1} + 1 > 1$, $n = \ln x_1 - 1$ 4 分

因为 $m > 1$, 所以 $y = mx + n$ 是曲线 $y = g(x)$ 的“下切线”或“下切线”的下方.

所以 $y = mx + n$, $g(x) = x^2$ 联立, 可得 $\Delta = m^2 + 4n \leq 0$ 5 分

所以 $(1 + \frac{1}{x_1})^2 + 4(\ln x_1 - 1) \leq 0$.

令 $G(x_1) = (1 + \frac{1}{x_1})^2 + 4(\ln x_1 - 1)$,

所以 $G'(x_1) = \frac{2(2x_1 + 1)(x_1 - 1)}{x_1^3}$, 可得 $0 < x_1 < 1, G'(x_1) < 0$; $x_1 > 1, G'(x_1) > 0$.

因为 $G(1) = 0$, 所以 $x_1 = 1$ 7 分

所以 $m = 2, n = -1$ 8 分

(2) 令 $h(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x (x > 0)$, 则 $h'(x) = 2ax + a - 2 - \frac{1}{x} = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$

当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) < 0$ 恒成立, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不符合题意. 9 分

当 $a > 0$ 时, $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 11 分

要使 $h(x)$ 有两个零点, 首先要有 $h_{\min}(x) = h(\frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} + 1 + \ln a < 0$,

令 $\varphi(a) = \ln a - \frac{1}{a} + 1$, 则 $\varphi'(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} > 0$, 即 $\varphi(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

因为 $\varphi(1) = 0$, 所以解得 $0 < a < 1$ 13 分

此时 $h(\frac{1}{e}) = \frac{a}{e^2} + \frac{a+e-2}{e} > 0$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上有一个零点, 15 分

又 $\ln x + x \leq 2x - 1$, 所以 $\ln x \leq x - 1 < x$.

$h(\frac{4-a}{a}) = a(\frac{4-a}{a})^2 + (a-2)\frac{4-a}{a} - \ln \frac{4-a}{a} > a(\frac{4-a}{a})^2 + (a-2)\frac{4-a}{a} - \frac{4-a}{a} = \frac{4-a}{a} > 0$.

且 $\frac{4-a}{a} > \frac{1}{a}$, 所以在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上有一个零点.

18. (17 分)

解: (1) 等腰三角形的高为 $R(1 + \cos \theta)$, 底为 $2R \sin \theta$, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

..... 3 分

所以等腰三角形的面积为 $S = R^2(1 + \cos \theta) \sin \theta$, 4 分

$S' = R^2(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) = R^2(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$, 6 分

由 $S' = 0$, 可得 $\theta = \frac{\pi}{3}$,

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ 时, $S' > 0$, 当 $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 时, $S' < 0$ 8 分

所以当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 该圆的内接等腰三角形的面积最大. 9 分

(2) 设圆锥的底面半径为 r , 高为 h , 体积为 V , 则 $r^2 + h^2 = R^2$,

因此 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3 (0 < h < R)$, 11 分

所以 $V' = \frac{1}{3} \pi R^2 - \pi h^2$, 由 $V' = 0$ 解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3} R$,

当 $h \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3} R)$ 时, $V' > 0$, 当 $h \in (\frac{\sqrt{3}}{3} R, R)$ 时, $V' < 0$, 13 分

所以当 $h = \frac{\sqrt{3}}{3} R$ 时容积最大, 把 $h = \frac{\sqrt{3}}{3} R$ 代入 $r^2 + h^2 = R^2$ 得 $r = \frac{\sqrt{6}}{3} R$

由 $R\alpha = 2\pi r$ 得 $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$, 即圆心角为 $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$ 时容积最大. 17 分

19. (17 分)

解: (1) ①当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$, 1 分

所以 $f'(1) = 2$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线为 $y = 2x - 1$ 3 分

②法一: 由①可分析得出 $m = 2$, $n = -1$, 下证成立.

因为 $y = \ln x - x + 1$, $y' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$.

又因为当 $x = 1$ 时, $y = 0$, 所以 $\ln x \leq x - 1$, 即 $f(x) \leq 2x - 1$ 6 分

因为 $(x-1)^2 \geq 0$, 所以 $x^2 \geq 2x-1$, 所以 $2x-1 \leq g(x)$.

所以 $f(x) \leq 2x-1 \leq g(x)$ 8 分

法二: 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ 单调递减, 所以 $y = f(x)$ 的图象呈“上凸”递增, 所以 $y = mx + n$ 是曲线 $y = f(x)$ 的“上切线”或在“上切线”的上方.

设 $y = f(x)$ 上一点为 $(x_1, f(x_1))$, 该点处的切线是 $y = (\frac{1}{x_1} + 1)(x - x_1) + \ln x_1 + x_1$,

所以 $m = \frac{1}{x_1} + 1 > 1$, $n = \ln x_1 - 1$ 4 分

因为 $m > 1$, 所以 $y = mx + n$ 是曲线 $y = g(x)$ 的“下切线”或“下切线”的下方.

所以 $y = mx + n$, $g(x) = x^2$ 联立, 可得 $\Delta = m^2 + 4n \leq 0$ 5 分

所以 $(1 + \frac{1}{x_1})^2 + 4(\ln x_1 - 1) \leq 0$.

令 $G(x_1) = (1 + \frac{1}{x_1})^2 + 4(\ln x_1 - 1)$,

所以 $G'(x_1) = \frac{2(2x_1 + 1)(x_1 - 1)}{x_1^3}$, 可得 $0 < x_1 < 1, G'(x_1) < 0$; $x_1 > 1, G'(x_1) > 0$.

因为 $G(1) = 0$, 所以 $x_1 = 1$ 7 分

所以 $m = 2, n = -1$ 8 分

(2) 令 $h(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x (x > 0)$, 则 $h'(x) = 2ax + a - 2 - \frac{1}{x} = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$

当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) < 0$ 恒成立, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不符合题意. 9 分

当 $a > 0$ 时, $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 11 分

要使 $h(x)$ 有两个零点, 首先要有 $h_{\min}(x) = h(\frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} + 1 + \ln a < 0$,

令 $\varphi(a) = \ln a - \frac{1}{a} + 1$, 则 $\varphi'(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} > 0$, 即 $\varphi(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

因为 $\varphi(1) = 0$, 所以解得 $0 < a < 1$ 13 分

此时 $h(\frac{1}{e}) = \frac{a}{e^2} + \frac{a+e-2}{e} > 0$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上有一个零点, 15 分

又 $\ln x + x \leq 2x - 1$, 所以 $\ln x \leq x - 1 < x$.

$h(\frac{4-a}{a}) = a(\frac{4-a}{a})^2 + (a-2)\frac{4-a}{a} - \ln \frac{4-a}{a} > a(\frac{4-a}{a})^2 + (a-2)\frac{4-a}{a} - \frac{4-a}{a} = \frac{4-a}{a} > 0$.

且 $\frac{4-a}{a} > \frac{1}{a}$, 所以在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上有一个零点.

所以 $h(x)$ 有两个零点.

所以 $0 < a < 1$17 分