

2025-2026 年第一学期高一年级 11 月期中摸底调研

数学学科

(总分: 150 分; 考试时长: 120 分钟)

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. C

【知识点】交集的概念及运算

【分析】利用交集的概念计算即可.

【详解】根据交集的概念可知 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选: C

2. C

【知识点】特称命题的否定及其真假判断

【分析】根据存在量词命题的否定是全称量词命题即可判断.

【详解】命题“ $\exists x \in [-2, 5], x^2 - 4x - 5 < 0$ ”的否定是“ $\forall x \in [-2, 5], x^2 - 4x - 5 \geq 0$ ”.

故选: C

3. B

【知识点】全称命题的否定及其真假判断

【分析】根据全称命题的否定选择.

【详解】 $\forall x \geq 1, x^2 - 1 \leq 0$ 的否定为: $\exists x \geq 1, x^2 - 1 > 0$.

故选: B.

4. B

【知识点】根据集合的包含关系求参数、具体函数的定义域

【分析】解不等式 $x^2 - 4 \geq 0$ 求得集合 A , 进而求得 $\complement_{\mathbb{R}} A$, 由 $\complement_{\mathbb{R}} A \subseteq B$, 可求实数 m 的取值范围.【详解】由 $x^2 - 4 \geq 0$, 解得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$, 所以 $A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | -2 < x < 2\}$, 又 $B = \{x | x < m\}$, $\complement_{\mathbb{R}} A \subseteq B$,所以 $m \geq 2$, 所以实数 m 的取值范围是 $m \geq 2$.

故选: B.

5. D

【知识点】并集的概念及运算、具体函数的定义域、抽象函数的定义域

【解析】本题先根据抽象函数求定义域得到 $M = \{x | -1 < x < 2\}$, 再由具体函数求定义域得到 $N = \{x | 1 < x \leq 5\}$, 最后求 $M \cup N$ 即可.【详解】解: 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3, 3)$,所以在函数 $f(2x-1)$ 中有 $-3 < 2x-1 < 3$, 解得 $-1 < x < 2$

所以设 $f(2x-1)$ 的定义域为 $M = \{x | -1 < x < 2\}$

因为 $N = \left\{x \left| y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{5-x} \right.\right\}$, 所以 $N = \{x | 1 < x \leq 5\}$

所以 $M \cup N = \{x | -1 < x \leq 5\}$

故选: D

【点睛】本题考查求抽象函数的定义域、求具体函数的定义域、集合的并集运算, 是基础题.

6. C

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、根据函数的单调性解不等式、由函数奇偶性解不等式

【分析】利用函数的单调性与奇偶性分析得 $f(x)$ 的性质, 从而将不等式转化为 $\frac{f(x-1)}{x-1} < 0$, 再分类讨论 $x > 1$ 与 $x < 1$ 两种情况即可得解.

【详解】依题意, 不妨令 $0 < x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$,

因为 $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) > 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

又 $f(5) = 0$, 所以 $f(-5) = -f(5) = 0$,

又 $f(1-x) = -f(x-1)$,

所以不等式 $\frac{f(1-x) - f(x-1)}{x-1} > 0$ 可化为 $\frac{-2f(x-1)}{x-1} > 0$, 即 $\frac{f(x-1)}{x-1} < 0$,

当 $x-1 > 0$, 即 $x > 1$ 时, $f(x-1) < 0 = f(5)$,

则 $x-1 < 5$, 解得 $x < 6$, 故 $1 < x < 6$;

当 $x-1 < 0$, 即 $x < 1$ 时, $f(x-1) > 0 = f(-5)$,

则 $x-1 > -5$, 解得 $x > -4$, 故 $-4 < x < 1$;

综上, $-4 < x < 1$ 或 $1 < x < 6$, 即所求不等式的解集为 $(-4, 1) \cup (1, 6)$.

故选: C.

7. A

【知识点】利用函数单调性求最值或值域、根据分段函数的值域(最值)求参数

【分析】首先分析函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 的取值情况, 从而判断 $c \leq 1$, 再结合 $c^2 - 2c + 3 \leq 6$ 得到 $-1 \leq c \leq 1$,

再分 $0 \leq c \leq 1$ 和 $-1 \leq c < 0$ 两种情况讨论, 当 $-1 \leq c < 0$ 时结合函数 $y = -\frac{1}{x} + 2$ 在 $(-\infty, c)$ 上的单调性,

得到 $-\frac{1}{c} + 2 \leq 6$, 从而求出 c 的取值范围.

【详解】对于函数 $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ ，当 $x=3$ 时， $y=6$ ，当 $x=1$ 时， $y=2$ ，

而 $-\frac{1}{x} \neq 0$ ，即有 $-\frac{1}{x} + 2 \neq 2$ ，依题意可得 $c \leq 1$ ，又 $c^2 - 2c + 3 \leq 6$ ，解得 $-1 \leq c \leq 3$ ，

所以 $-1 \leq c \leq 1$ ；

当 $0 \leq c \leq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的取值集合为 $(2, +\infty)$ ，不符合题意，

当 $-1 \leq c < 0$ ，函数 $y = -\frac{1}{x} + 2$ 在 $(-\infty, c)$ 上单调递增，

则 $2 < -\frac{1}{x} + 2 < -\frac{1}{c} + 2$ ，所以 $\begin{cases} -\frac{1}{c} + 2 \leq 6 \\ -1 \leq c < 0 \end{cases}$ ，解得 $-1 \leq c \leq -\frac{1}{4}$ ，

所以实数 c 的取值范围是 $\left[-1, -\frac{1}{4}\right]$ 。

故选：A

【点睛】关键点睛：本题的关键是分析得到 $-1 \leq c \leq 1$ ，再分 $0 \leq c \leq 1$ 和 $-1 \leq c < 0$ 两种情况讨论。

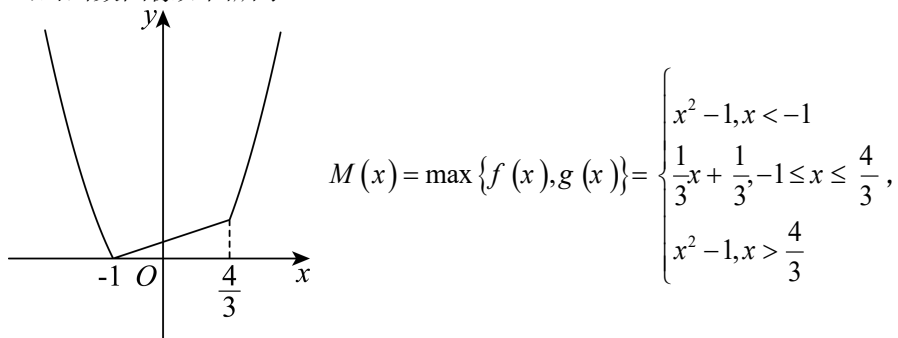
8. A

【知识点】分段函数的值域或最值

【分析】由 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ，写出函数解析式，画出函数图像即可观察得最小值。

【详解】令 $x^2 - 1 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ，解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{4}{3}$ ，

画出函数图像如图所示：



由函数图像可知， $M(x)$ 的最小值为 0。

故选：A

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. BCD

【知识点】根据集合的包含关系求参数、根据交集结果求集合或参数

【分析】先用列举法表示集合 P ，再由 $S \cap P = S$ 得出 $S \subseteq P$ ，对 a 进行分类讨论即可确定 a 的值。

【详解】因为 $S \cap P = S$ ，所以 $S \subseteq P$ ，

因为 $P = \{x | x^2 + 5x - 6 = 0\} = \{-6, 1\}$ ，

所以当 $a = 0$ 时， $S = \emptyset$ ，满足 $S \subseteq P$ ，即 $a = 0$ 符合题意；

当 $a \neq 0$ 时， $S = \left\{\frac{1}{a}\right\}$ ，要满足 $S \subseteq P$ ，则有 $\frac{1}{a} = -6$ 或 $\frac{1}{a} = 1$ ，解得 $a = -\frac{1}{6}$ 或 $a = 1$ ；

综上所述， a 的值可能是 $0, -\frac{1}{6}, 1$ 。

故选: BCD.

10. ACD

【知识点】函数基本性质的综合应用、定义法判断或证明函数的单调性、根据函数的单调性解不等式

【分析】依题意令 $x=y=0$, 求出 $f(0)$, 从而判断 A; 令 $y=x$ 得到 $f(2x)=2f(x)-1$, 再令 $x=2x$, $y=2x$, 即可判断 B; 再利用定义法证明函数的单调性即可判断 C; 依题意原不等式等价于 $f(3x^2) > f(5x-2)$, 再根据函数的单调性转化为自变量的不等式, 即可判断 D.

【详解】因为 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 则有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$,

令 $x=y=0$, 则 $f(0)=f(0)+f(0)-1$, 则 $f(0)=1$, 故 A 正确;

令 $y=x$, 则 $f(2x)=f(x)+f(x)-1=2f(x)-1$,

令 $2x$ 代 x , $y=2x$ 则 $f(2x+2x)=f(2x)+f(2x)-1=2f(2x)-1$,

即 $f(4x)=2f(2x)-1=2[2f(x)-1]-1$, 即 $f(4x)=4f(x)-3$, 故 B 错误;

设 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, 由 $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$,

令 $y=-x$, 则 $f(0)=f(x)+f(-x)-1$, 即 $f(x)+f(-x)=2$,

令 $x=x_2$, $y=-x_1$, 则 $f(x_2-x_1)=f(x_2)+f(-x_1)-1=f(x_2)+2-f(x_1)-1$, 即

$$f(x_2-x_1)-1=f(x_2)-f(x_1),$$

因为 $x > 0$ 时, $f(x) < 1$, 又 $x_2 - x_1 > 0$, 故 $f(x_2-x_1) < 1$,

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1 < 0$, 所以 $f(x_2) < f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

又 $f(1)=-2$, 所以 $f(2)=2f(1)-1=-5$, $f(3)=f(2)+f(1)-1=-8$,

又 $f(3)+f(-3)=2$, 所以 $f(-3)=2-f(3)=10$,

故 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最大值为 10, 故 C 正确;

由 $f(3x^2)-2f(x) > f(3x)+4$, 即 $f(3x^2) > f(x)+f(x)+f(3x)+4$,

即 $f(3x^2) > f(2x+3x)+2+4$, 即 $f(3x^2) > f(5x)+7-1$,

又因为 $f(2)+f(-2)=2$, 即 $f(-2)=7$,

所以 $f(3x^2) > f(5x)+f(-2)-1$, 即 $f(3x^2) > f(5x-2)$,

故 $3x^2 < 5x - 2$, 即 $(3x-2)(x-1) < 0$, 解得 $\frac{2}{3} < x < 1$,

即原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{3} < x < 1\right\}$, 故 D 正确;

故选: ACD.

11. BCD

【知识点】分段函数的性质及应用、利用函数单调性求最值或值域、根据解析式直接判断函数的单调性

【分析】对 A, 比较 $x=1$ 时两段的值可判断; 对 B, 分别判断 $k > 0$ 和 $-\frac{1}{2} < k < 0$ 时函数单调性即可得出; 对 C, 根据单调性求出值域即可判断; 对 D, 求出 $x \geq 1$ 和 $x < 1$ 时 $f(x)$ 范围即可得出.

【详解】对于选项 A, 当 $k > 0$ 时, $f(0) = 0 + 2 = 2$, $f(1) = \frac{k}{1} + k + 2 = 2k + 2 > 2 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是减函数, 故选项 A 错误,

对于选项 B, 当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数, 无最小值,

又 $f(x) = -x + 2$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数, 也无最小值, 即 $k > 0$ 时, $f(x)$ 无最小值,

当 $-\frac{1}{2} < k < 0$ 时, $f(x) = \frac{k}{x} + k + 2$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 所在 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为

$$f(1) = 2k + 2 > 1,$$

又 $f(x) = -x + 2$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数, 且 $f(x) > -1 + 2 = 1$, 所以当 $-\frac{1}{2} < k < 0$ 时, $f(x)$ 无最小值,

综上, 当 $k > -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 无最小值, 所以选项 B 正确.

对于选项 C, 当 $x < 1$ 时, $f(x) = -x + 2 \in (1, +\infty)$,

当 $x \geq 1$ 时, 由 $k = -1$, 得 $f(x) = -\frac{1}{x} - 1 + 2 = -\frac{1}{x} + 1$ 是增函数,

所以 $f(x) = -\frac{1}{x} + 1 \in [0, 1)$, 所以 $f(x)$ 的值域是 $[0, 1) \cup (1, +\infty)$, 故选项 C 正确.

对于选项 D, 当 $x \geq 1$ 时, 由 $k = -3$, 得 $f(x) = -\frac{3}{x} - 1 \in [-4, -1)$, 所 $-f(x) \in (1, 4]$,

而当 $x < 1$ 时, $f(x) \in (1, +\infty)$, $(1, 4] \subseteq (1, +\infty)$,

因此 $\forall x_1 \geq 1, \exists x_2 < 1$, 使得 $-f(x_1) = f(x_2)$, 即 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 所以选项 D 正确,

故选: BCD.

【点睛】求函数最值和值域的常用方法:

- (1) 单调性法: 先确定函数的单调性, 再由单调性求最值;
- (2) 图象法: 先作出函数的图象, 再观察其最高点、最低点, 求出最值;
- (3) 基本不等式法: 先对解析式变形, 使之具备“一正二定三相等”的条件后用基本不等式求出最值;

(4) 换元法: 对比较复杂的函数可通过换元转化为熟悉的函数, 再用相应的方法求最值.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

【知识点】利用不等式求值或取值范围、由幂函数的单调性求参数

【分析】根据幂函数的性质可知 $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在定义域 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递减, 结合题干列出不等式

$$\text{组} \begin{cases} 3-2m > 0 \\ m+1 > 0 \\ 3-2m > m+1 \end{cases}, \text{解不等式组即可.}$$

【详解】因为幂函数 $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在定义域 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以} \begin{cases} 3-2m > 0 \\ m+1 > 0 \\ 3-2m > m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > -1 \\ m < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -1 < m < \frac{2}{3},$$

故答案为: $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$.

13. $2a+b-1$

【知识点】对数的运算性质的应用、运用换底公式化简计算

【分析】先根据已知条件求出 $\lg 2$ 和 $\lg 3$, 然后再将 $\lg 54$ 进行分解, 用求出的 $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 来表示, 最后转化为用 a 、 b 表示.

【详解】因为 $\lg 6 = \lg(2 \times 3) = \lg 2 + \lg 3 = a$,

$$\lg 15 = \lg \frac{30}{2} = \lg 30 - \lg 2 = \lg(3 \times 10) - \lg 2 = (\lg 3 + \lg 10) - \lg 2 = (\lg 3 + 1) - \lg 2 = b.$$

由 $\lg 2 + \lg 3 = a$, 可得 $\lg 3 = a - \lg 2$, 将其代入 $(\lg 3 + 1) - \lg 2 = b$ 中, 得到 $(a - \lg 2 + 1) - \lg 2 = b$.

$$\text{对 } (a - \lg 2 + 1) - \lg 2 = b \text{ 进行化简, 所以 } \lg 2 = \frac{a+1-b}{2}, \lg 3 = a - \frac{a+1-b}{2} = \frac{a+b-1}{2}.$$

$$\text{因为 } \lg 54 = \lg(2 \times 27) = \lg 2 + \lg 27 = \lg 2 + 3\lg 3.$$

把 $\lg 2, \lg 3$ 代入可得:

$$\lg 54 = \frac{a+1-b}{2} + 3 \times \frac{a+b-1}{2} = 2a + b - 1.$$

故答案为: $2a + b - 1$.

14. $[1, 3]$

【知识点】根据分段函数的值域(最值)求参数

【分析】根据函数的最小值列不等式, 由此求得 a 的取值范围.

【详解】由于 $f(x)$ 的最小值是 $f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减,

所以 $a \geq 1$, 此时 $y = ax + \frac{1}{3}a$ 单调递增,

则 $(1-a)^2 \leq a + \frac{1}{3}a$, 整理得 $3a^2 - 10a + 3 \leq 0$,

解得 $\frac{1}{3} \leq a \leq 3$.

综上所述, a 的取值范围是 $[1, 3]$.

故答案为: $[1, 3]$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (1) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

(2) $(-\infty, -14)$

【知识点】 求二次函数的解析式、一元二次不等式在某区间上的恒成立问题

【分析】 (1) 利用待定系数法及题目所给条件即可求解求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 恒成立问题常用分离参数的方法, 分离参数后转化为求函数在区间上的最值即可.

【详解】 (1) 由 $f(x)$ 是二次函数, 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

因为 $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$,

所以 $(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x - 3$,

所以 $2ax + a + b = 2x - 3$,

又 $f(1) = -8$, 所以 $\begin{cases} a+b+c=-8 \\ 2a=2 \\ a+b=-3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-5 \end{cases}$

所以 $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

(2) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, $f(x) > 2x + m$ 恒成立, 即 $x^2 - 6x - 5 > m$ 恒成立,

令 $g(x) = x^2 - 6x - 5$, 则 $m < g(x)_{\min}$, $g(x) = (x-3)^2 - 14$,

当 $x \in [-2, 3]$ 时, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in [3, 4]$ 时, $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(3) = -14$, 所以 $m < -14$,

所以 m 的取值范围为 $(-\infty, -14)$.

16. (1) 8

(2) 12

【知识点】 基本不等式求积的最大值、基本不等式求和的最小值、条件等式求最值

【分析】 (1) 利用基本不等式即可求出最小值;

(2) 根据已知化简求出得 $x = 2 + \frac{8}{y-1} (y > 1)$, 再变形化简应用基本不等式计算.

【详解】(1) 当 $a = 0$ 时, 由 $x > 0, y > 0, xy = x + 2y$, 则 $xy = x + 2y \geq 2\sqrt{2xy}$,

即 $\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{2}$, 可得 $xy \geq 8$,

当且仅当 $x = 2y$, 即 $x = 4, y = 2$ 时 xy 取最小值 8.

(2) 当 $a = 6$ 时, 由 $x > 0, y > 0, xy = x + 2y + 6$,

由 $xy = x + 2y + 6$ 得 $x = \frac{2y+6}{y-1} = 2 + \frac{8}{y-1} (y > 1)$,

则 $x + 2y = 2 + \frac{8}{y-1} + 2y = 4 + \frac{8}{y-1} + 2y - 2 \geq 2\sqrt{6} + 4 = 12$,

故可知当 $y = 3, x = 6$ 时, $x + 2y$ 取得最小值为 12.

17. (1) $A \cup B = \{x | 1 < x \leq 6\}$, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 1 < x < 4\}$

(2) $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$

【知识点】并集的概念及运算、交并补混合运算、根据必要不充分条件求参数

【分析】(1) 利用并集概念求解 $A \cup B$, 先求出 $\complement_{\mathbb{R}} A$, 然后再求解 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$ 即可;

(2) 根据题意知集合 C 是集合 A 的真子集, 分 $C = \emptyset$ 和 $C \neq \emptyset$ 讨论求解即可.

【详解】(1) 因为集合 $A = \{x | 4 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x | 1 < x < 5\}$, 所以 $A \cup B = \{x | 1 < x \leq 6\}$;

又 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 4 \text{ 或 } x > 6\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 1 < x < 4\}$.

(2) 因为 $x \in A$ 是 $x \in C$ 的必要不充分条件, 所以集合 C 是集合 A 的真子集,
当 $C = \emptyset$ 时, $2a - 3 > a + 1$, 解得 $a > 4$, 满足题意;

当 $C \neq \emptyset$ 时, 由题意 $\begin{cases} a+1 \leq 6 \\ 2a-3 > 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+1 < 6 \\ 2a-3 \geq 4 \end{cases}$, 所以 $\frac{7}{2} \leq a \leq 4$;

综上所述: a 的取值范围为 $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

18. (1) $f(-1) = 0$, 证明见解析

(2) $[2, 3) \cup (3, 4]$

(3) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right]$

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、函数奇偶性的定义与判断、基本不等式求和的最小值、由函数奇偶性解不等式

【分析】(1) 取 $x_1 = x_2 = 1$ 得到 $f(1) = 0$, 取 $x_1 = x_2 = -1$ 得到 $f(-1) = 0$, 取 $x_2 = -1$ 得到 $f(x_1) = f(-x_1)$, 得到答案.

(2) 证明函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 得到 $-1 \leq x-3 \leq 1$, 结合定义域得到答案.

(3) 根据函数单调性和奇偶性得到 $\frac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2} \geq |a|$, 考虑 $x=1$, $x<1$, $x>1$ 三种情况, 得到函数的最值, 解不等式得到答案.

【详解】(1) 取 $x_1 = x_2 = 1$ 得到 $f(1) + f(1) = f(1)$, 得到 $f(1) = 0$,

取 $x_1 = x_2 = -1$ 得到 $f(-1) + f(-1) = f(1) = 0$, 得到 $f(-1) = 0$,

取 $x_2 = -1$ 得到 $f(x_1) + f(-1) = f(-x_1)$, 即 $f(x_1) = f(-x_1)$, 故函数为偶函数.

(2) 设 $x_2 > x_1 > 0$,

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1} \cdot x_1\right) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + f(x_1) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

$\frac{x_2}{x_1} > 1$, 故 $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) < 0$, 即 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 函数单调递减.

函数为偶函数, 故函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

$f(x-3) \geq 0$, 故 $-1 \leq x-3 \leq 1$, 且 $x-3 \neq 0$, 解得 $x \in [2, 3) \cup (3, 4]$.

$$(3) f(2x^2 - 3x + 3) \leq f(x^2 - 2x + 2) + f(a) = f(ax^2 - 2ax + 2a),$$

根据 (2) 知: $|2x^2 - 3x + 3| \geq |ax^2 - 2ax + 2a|$, $2x^2 - 3x + 3 > 0$, $x^2 - 2x + 2 > 0$ 恒成立,

$$\text{故 } \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2} \geq |a|, \quad \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2} = 2 + \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1},$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2} = 2, \text{ 当 } x>1 \text{ 时, } 2 + \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1} > 2,$$

$$\text{当 } x<1 \text{ 时, } 2 + \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1} = 2 - \frac{1}{1-x + \frac{1}{1-x}} \geq 2 - \frac{1}{2\sqrt{(1-x) \times \frac{1}{1-x}}} = \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } 1-x = \frac{1}{1-x}, \text{ 即 } x=0 \text{ 时等号成立, } x \neq 0, \text{ 故 } 2 + \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1} > \frac{3}{2}.$$

综上所述: $|a| \leq \frac{3}{2}$, 解得 $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$, $a \neq 0$, 故 $a \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right]$.

19. (1) 3

(2) $\frac{5}{4}$

(3) $b = -\frac{9}{8}$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“偏差”取最小值 $\frac{9}{8}$.

【知识点】函数基本性质的综合应用、求二次函数的值域或最值、函数新定义

【分析】(1) 写出 $y = |f(x) - g(x)|$ 的解析式, 结合 $x \in [0, 1]$, 求出值域 $y \in [1, 3]$, 可得偏差为 3;

(2) $y = |f(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{x} + 1 - (kx + 1) \right| = \left| \frac{1}{x} - kx \right|, x \in [1, 2]$, 利用 $t = \frac{1}{x} - kx$ 和 $y = |t|$ 的函数性质, 通过分类讨论, 由“偏差”值得到 k 的值;

(3) 结合所给条件, 可得函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“偏差”为 $y_{\max} = \max \left\{ |b|, \left| b + \frac{9}{4} \right| \right\}$, 结合绝对值不等式,

求出 $(y_{\max})_{\min}$ 即可得.

【详解】(1) (1) $y = |f(x) - g(x)| = |x^2 + x + 1| = \left| \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right|, x \in [0, 1]$,

因为 $x \in [0, 1]$, 所以 $\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \in [1, 3]$,

则 $y = \left| \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| \in [1, 3]$,

所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“偏差”为 3.

(2) 令 $t = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} + 1 - (kx + 1) = \frac{1}{x} - kx, x \in [1, 2]$,

$\because k > 0, \therefore t = \frac{1}{x} - kx$ 是单调减函数, $\therefore t \in \left[\frac{1}{2} - 2k, 1 - k \right]$

由题意, $y = |t|, t \in \left[\frac{1}{2} - 2k, 1 - k \right]$, 且 $y_{\max} = 2$.

当 $\left| \frac{1}{2} - 2k \right| \leq |1 - k|$, 即 $0 < k \leq \frac{1}{2}$ 时, $y_{\max} = |1 - k| = 2$, 解得 $k = 3$ 或 $k = -1$, 不符合;

当 $\left| \frac{1}{2} - 2k \right| > |1 - k|$, 即 $k > \frac{1}{2}$ 时, $y_{\max} = \left| \frac{1}{2} - 2k \right| = 2$, $\frac{1}{2} - 2k = 2$ 或 $\frac{1}{2} - 2k = -2$,

解得 $k = \frac{5}{4}$ 或 $k = -\frac{3}{4}$ (舍)

所以 $k = \frac{5}{4}$

(3) $y = |f(x) - g(x)| = |x^2 - x - (2x + b)| = |x^2 - 3x - b| = \left| \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - b \right|, x \in [0, 3]$,

因为 $x \in [0, 3]$, 所以 $\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - b \in \left[-\frac{9}{4} - b, -b \right]$,

$$\text{由 } y = \left| \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - b \right|, \text{ 则 } y_{\max} = \max \left\{ |b|, \left| b + \frac{9}{4} \right| \right\},$$

$$\text{令 } |b| \geq \left| b + \frac{9}{4} \right|, \text{ 即 } b^2 \geq \left(b + \frac{9}{4} \right)^2, \text{ 解得 } b \leq -\frac{9}{8},$$

$$y_{\max} = \max \left\{ |b|, \left| b + \frac{9}{4} \right| \right\} = \begin{cases} -b, & b \leq -\frac{9}{8} \\ b + \frac{9}{4}, & b > -\frac{9}{8} \end{cases}$$

$$\text{故当且仅当 } b = -\frac{9}{8} \text{ 时, 有 } (y_{\max})_{\min} = \frac{9}{8}.$$

故当 b 的值为 $-\frac{9}{8}$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“偏差”取最小值 $\frac{9}{8}$.

【点睛】 函数新定义问题, 常常会 and 函数的性质, 包括单调性, 值域等进行结合, 很好的考虑了知识迁移, 综合运用能力, 对于此类问题, 一定要解读出题干中的信息, 正确理解问题的本质, 转化为熟悉的问题来进行解决.