

2025-2026 年第一学期高一年级 11 月期中摸底调研

数学学科

(总分: 150 分; 考试时长: 120 分钟)

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. D

【知识点】特称命题的否定及其真假判断

【分析】利用含有一个量词的命题的否定的定义求解.

【详解】解: 因为命题“ $\exists m \in (0, +\infty)$, $m^3 + 1 > m$ ”是存在量词命题,

所以其否定是全称量词命题即 $\forall m \in (0, +\infty)$, $m^3 + 1 \leq m$,

故选: D.

2. B

【知识点】判断元素与集合的关系、判断两个集合的包含关系、判断两个集合是否相等

【分析】根据元素与集合的关系和集合与集合的关系判断各命题.

【详解】因为 $\{0\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, 故①错;

因为 $0 \in \mathbb{N}$, 故②对;

因为 $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, 故③对;

因为 $\emptyset \subseteq \{0\}$ 且 $\emptyset \neq \{0\}$, 故④错;

因为 $\{0, 1\} \neq \{(0, 1)\}$, 故⑤错;

因为 $\emptyset \in \{\emptyset\}$, 又 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 且 $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, 故⑥错;

所以正确的个数为 2 个, 故 B 正确.

故选: B.

3. D

【知识点】根据分段函数的单调性求参数

【分析】由解析式及 $f(x)$ 的单调性, 结合一次函数性质列不等式组求参数范围.

【详解】由 $y = -x - 4a$ 为递减函数, 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数,

所以 $f(x)$ 单调递减, 则 $\begin{cases} 2a - 1 < 0 \\ 2a - 2 \geq -1 - 4a \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6} \leq a < \frac{1}{2}.$

故选: D

4. D

【知识点】既不充分也不必要条件

【分析】对充分性和必要性分别给出反例即可.

【详解】当 $(a, b, c, d) = (0, -1, 0, -1)$ 时, 有 $a = 0 > -1 = b$, $c = 0 > -1 = d$, 但 $ac = 0 < 1 = bd$;

当 $(a, b, c, d) = (-1, 0, -1, 0)$ 时, 有 $ac = 1 > 0 = bd$, 但 $a = -1 < 0 = b$.

所以原条件不是充分的也不是必要的.

故选: D.

5. C

【知识点】根据函数是幂函数求参数值

【分析】利用幂函数的定义可求得 m 的值, 分类讨论可求得符合条件的 m 的值.

【详解】因为 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^m$ 是幂函数, 所以 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -1$,

当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^2$, 此时 $f(x)$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 定义域是 $\mathbb{R}$.

此时只有甲是错误的, 乙、丙是正确的, 故 $m = 2$ 符合题意,

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-1}$, 此时 $f(x)$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 定义域是 $\{x | x \neq 0\}$,

此时只有甲是正确的, 乙、丙是错误的, 故 $m = -1$ 不符合题意.

故选: C.

6. A

【知识点】已知分段函数的值求参数或自变量

【分析】对 a 进行分类讨论, 直接计算可求解.

【详解】 $a \geq 1$ 时, $f(a) = a^2 - 1$, 则 $f(f(a)) = f(a^2 - 1)$,

进一步分类讨论, $a^2 - 1 \geq 1$ 时, 即 $a \geq \sqrt{2}$ 时, $f(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 - 1 = a^4 - 2a^2 = 3$, 整理得 $(a^2 - 1)^2 = 4$,

根据条件得 $a = \sqrt{3}$;

$a^2 - 1 < 1$ 时, 即 $1 \leq a < \sqrt{2}$ 时, $f(a^2 - 1) = (a^2 - 1) - 2 = a^2 - 3 = 3$, 得 $a^2 = 6$, 不符题意;

$a < 1$ 时, $f(a) = a - 2$, $f(f(a)) = f(a - 2)$,

进一步分类讨论, $a - 2 \geq 1$ 时, 即 $a \geq 3$ 时, 与 $a < 1$ 不符;

$a - 2 < 1$ 时, 即 $a < 3$, 所以 $a < 1$ 时, 有 $f(f(a)) = f(a - 2) = a - 4 = 3$, 得 $a = 7$, 与题意不符;

故选: A

7. D

【知识点】根据特称(存在性)命题的真假求参数、求二次函数的值域或最值

【分析】分离参数, 构造函数并求出最小值, 再结合存在量词命题求出范围.

【详解】不等式 $x^2 - x - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq x^2 - x$, 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $x^2 - x \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号,

由 $\exists x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ 时, 不等式 $x^2 - x - m \leq 0$ 成立, 得 $m \geq 0$,

所以 m 的取值范围是 $\{m | m \geq 0\}$.

故选: D

8. B

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、根据函数的单调性解不等式

【分析】根据条件分析出 $g(x) = f(x) - x$ 的单调性, 然后将不等式变形为 $g(2x+1) < g(x-1)$, 结合

单调性求解出解集.

【详解】因为任意的 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) > x_1 - x_2$, 即任意的 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$,

令 $g(x) = f(x) - x$, 所以任意的 $x_1 < x_2$, 都有 $g(x_1) > g(x_2)$,

所以 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数;

又因为 $f(2x+1) - f(x-1) < x+2 \Leftrightarrow f(2x+1) - (2x+1) < f(x-1) - (x-1) \Leftrightarrow g(2x+1) < g(x-1)$,

所以 $2x+1 > x-1$, 解得 $x > -2$, 所以不等式解集为 $(-2, +\infty)$,

故选: B.

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. AB

【知识点】判断元素与集合的关系、判断两个集合的包含关系、空集的概念以及判断

【分析】根据集合与集合的关系, 元素与集合的关系逐一判断即可.

【详解】根据集合间关系可得 $\emptyset \subseteq \{0\}$ 正确, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$ 错误

根据元素与集合之间的关系可得 $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$ 正确, $\emptyset \in \{0\}$ 错误

故选: AB.

10. AC

【知识点】求二次函数的值域或最值、基本不等式求和的最小值、条件等式求最值、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】利用基本不等式判断选项 A; 基本不等式结合乘“1”法判断选项 B; 利用二次函数的性质判断选项 C; 算式平方后利用基本不等式求积的最大值判断选项 D.

【详解】A, 已知 $a, b \in (0, +\infty)$, 且 $a + 2b = 4$,

$$2^a + 4^b = 2^a + 2^{2b} \geq 2\sqrt{2^a \times 2^{2b}} = 2\sqrt{2^{a+2b}} = 2\sqrt{2^4} = 8,$$

当且仅当 $2^a = 2^{2b}$, 即 $a = 2, b = 1$ 时等号成立,

所以 $2^a + 4^b$ 的最小值为 8, A 选项成立;

$$\text{B, } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) (a + 2b) = \frac{1}{4} \left(5 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \right) \geq \frac{1}{4} \left(5 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} \right) = \frac{9}{4},$$

当且仅当 $\frac{2b}{a} = \frac{2a}{b}$, 即 $a = b = \frac{4}{3}$ 时等号成立,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$, B 选项错误;

C, 由 $a + 2b = 4$, 有 $a = 4 - 2b > 0$, 则 $0 < b < 2$,

$$a^2 + b^2 = (4 - 2b)^2 + b^2 = 5b^2 - 16b + 16 = 5\left(b - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5},$$

所以当 $b = \frac{8}{5}$, $a = 4 - 2 \times \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$ 时, $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{16}{5}$, C 选项正确;

$$D, (\sqrt{1+a} + \sqrt{1+2b})^2 = 1+a+1+2b+2\sqrt{(1+a)(1+2b)} \leq 6+1+a+1+2b=1,$$

当且仅当 $1+a=1+2b$, 即 $a=2, b=1$ 时等号成立,

所以 $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+2b}$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$, D 选项错误.

故选: AC.

11. ACD

【知识点】判断命题的充分不必要条件、函数与方程的综合应用

【分析】根据充分条件、必要条件的定义判断 A, 利用特殊值判断 B, 对 M 的非空子集进行分类讨论, 即分满足 $a_1 + a_n = 2024$ 和满足 $a_1 + a_n \neq 2024$ 讨论即可判断 C, 依题意可得 $g[f(t)] = t$ 方程至少有一解, 即可判断 D.

【详解】对于 A: 由 $ac^2 > bc^2$, 可得 $a > b$, 故充分性成立,

由 $a > b$ 推不出 $ac^2 > bc^2$, 如 $c = 0$ 时 $ac^2 = bc^2$, 故必要性不成立,

所以 $ac^2 > bc^2$ 是 $a > b$ 的一个充分不必要条件, 故 A 正确;

对于 B: 当 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $c = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 时, 满足 $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1$, $a \neq 0$,

但是 $\frac{bc}{a^3} = -2 < 0$, 故 B 错误;

对于 C: 可设 M 的非空子集为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} (a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2023, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*)$,

又把这样的子集分为两类:

(1) 一类满足 $a_1 + a_n = 2024$, 这样的子集 $a_x = 2024$;

(2) 另一类满足 $a_1 + a_n \neq 2024$, 此时可把两个非空集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 与

$\{2024 - a_n, 2024 - a_{n-1}, \dots, 2024 - a_1\}$ 配对,

易知这是两个不同的集合, 且都是 M 的非空子集,

它们的最大数与最小数之和是 $(a_n + a_1) + [(2024 - a_1) + (2024 - a_n)] = 2024 \times 2$,

所以此时非空子集的 a_x 的平均数为 2024.

综上, M 的所有非空子集的特征数的平均数为 2024, 故 C 正确;

对于 D: 设 $f[g(x)] = x$ 有实数解 x_0 , 则 $f[g(x_0)] = x_0$,

因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的函数,

所以有 $g\{f[g(x_0)]\} = g(x_0)$, 再令 $t = g(x_0)$,

则有 $g[f(t)] = t$, 从而可知 $g[f(x)] = x$ 至少有一个解是 t ,

若 $g[f(x)] = x^2 + x - \frac{1}{5}$, 则 $g[f(x)] = x$, 即 $x^2 + x - \frac{1}{5} = x$, 解得 $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$, 符合题意, 故 D 正确;

故选: ACD

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. $[0, 8)$

【知识点】一元二次不等式在实数集上恒成立问题

【分析】根据题意, 分 $a = 0$ 与 $a \neq 0$ 讨论, 结合一元二次不等式恒成立代入计算, 即可得到结果.

【详解】当 $a = 0$ 时, 不等式为 $2 > 0$, 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, $\forall x \in \mathbf{R}$, $ax^2 - ax + 2 > 0$ 为真命题,

$$\text{则} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = a^2 - 8a < 0 \end{cases}, \text{解得 } 0 < a < 8;$$

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[0, 8)$.

故答案为: $[0, 8)$

13. 64

【知识点】对数的运算性质的应用、运用换底公式化简计算

【分析】将 $\log_8 a, \log_a 4$ 利用换底公式转化成 $\log_2 a$ 来表示即可求解.

【详解】由题 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$, 整理得 $(\log_2 a)^2 - 5 \log_2 a - 6 = 0$,

$\Rightarrow \log_2 a = -1$ 或 $\log_2 a = 6$, 又 $a > 1$,

所以 $\log_2 a = 6 = \log_2 2^6$, 故 $a = 2^6 = 64$

故答案为: 64.

14. 321

【知识点】判断集合的子集(真子集)的个数、函数关系的判断、确定形成映射的个数

【分析】根据条件得到 A 中元素个数的情况, 再根据一个集合对应函数的个数得到结果.

【详解】首先, 因为函数 $f: A \rightarrow B$ 的值域是 $B = \{0, 1\}$, 所以 A 中至少有两个元素,

又因为 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \subseteq M$, 对任意 $x, y \in A$, $x < y$, 都有 $f(x) \leq f(y)$,

当 A 中元素个数为 2 个时, 如 $A = \{1, 2\}$, 共 21 个, 根据 $f(1) = 0, f(2) = 1$ 可得每个集合对应 1 个函数,

所以此时共有 21 种情况,

当 A 中元素个数为 3 个时, 如 $A = \{1, 2, 3\}$, 共 35 个, 根据 $f(1) = f(2) = 0, f(3) = 1$ 或

$f(1) = 0, f(2) = f(3) = 1$ 可得到每个集合对应两个函数, 所以此时共有 $35 \times 2 = 70$ 种情况;

当 A 中元素个数为 4 个时, 如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 共 35 个, 根据 $f(1) = f(2) = f(3) = 0, f(4) = 1$ 或

$f(1)=f(2)=0, f(3)=f(4)=1$ 或 $f(1)=0, f(2)=f(3)=f(4)=1$ 得到每个集合对应 3 个函数, 所以此时共有 $35 \times 3 = 105$ 种情况;

当 A 中元素个数为 5 个时, 如 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 共 21 个, 根据 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0, f(5)=1$ 或

$f(1)=f(2)=f(3)=0, f(4)=f(5)=1$ 或 $f(1)=f(2)=0, f(3)=f(4)=f(5)=1$ 或

$f(1)=0, f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=1$ 得到每个集合对应 4 个函数, 所以此时共有 $21 \times 4 = 84$ 种情况;

当 A 中元素个数为 6 个时, 如 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 共 7 个, 根据

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0, f(6)=1$ 或 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0, f(5)=f(6)=1$ 或

$f(1)=f(2)=f(3)=0, f(4)=f(5)=f(6)=1$ 或 $f(1)=f(2)=0, f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=1$ 或

$f(1)=0, f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=1$ 得到每个集合对应 5 个函数, 所以此时共有 $7 \times 5 = 35$ 种情况;

当 A 中元素个数为 7 个时, 如 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 共 1 个, 根据

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=0, f(7)=1$

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0, f(6)=f(7)=1$ 或

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0, f(5)=f(6)=f(7)=1$ 或

$f(1)=f(2)=f(3)=0, f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=1$ 或

$f(1)=f(2)=0, f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=1$ 或

$f(1)=0, f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=1$ 得到每个集合对应 6 个函数, 所以此时共有

$1 \times 6 = 6$ 种情况;

所以共有: $21 + 70 + 105 + 84 + 35 + 6 = 321$ 种情况,

故答案为: 321.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (1) $\frac{13}{3}$; (2) $(x-2y-1)(x+y-1)$; (3) $10\sqrt{2}$

【知识点】 指数幂的化简、求值、数与式

【分析】 (1) 利用分数指数幂, 及分母有理化与根式的化简可求值;

(2) 利用十字相乘法可因式分解;

(3) 由已知可求得 $ab=1$, 利用立方和因式分解可求值.

【详解】 (1) $(0.027)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = [(0.3)^3]^{-\frac{1}{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - \sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2}$

$$= (0.3)^{-1} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{10}{3} + 2 + \sqrt{3} - |\sqrt{3}+1| = \frac{13}{3}$$

$$(2) \quad x^2 - xy - 2y^2 - 2x + y + 1 = (x-2y)(x+y) + (-2x+y) + 1$$

$$= (x-2y-1)(x+y-1);$$

$$(3) \quad \text{由 } a+b=2\sqrt{2}, \text{ 可得 } a^2+2ab+b^2=8, \text{ 又 } a^2+b^2=6, \text{ 所以 } ab=1,$$

$$\text{由 } a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=2\sqrt{2}(6-1)=10\sqrt{2}.$$

$$16. (1) A \cap B = [-2, -1); \quad A \cup (\partial_U B) = (-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$$

$$(2) (-\infty, -4] \cup [8, +\infty)$$

【知识点】交并补混合运算、根据充分不必要条件求参数、由指数函数的单调性解不等式

【分析】(1) 解不等式求得集合 A, B , 进而可求 $A \cap B$, $A \cup (\partial_U B)$;

(2) 求得集合 C , 由题意可得 $A \subseteq C$, 进而可求实数 a 的取值范围.

【详解】(1) 由 $\frac{1}{2} \leq (\sqrt{2})^x \leq 8$, 可得 $2^{-1} \leq 2^{\frac{x}{2}} \leq 2^3$, 所以 $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 3$, 解得 $-2 \leq x \leq 6$,

$$\text{所以 } A = \left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq (\sqrt{2})^x \leq 8 \right\} = [-2, 6],$$

$$\text{由 } \frac{x-1}{x+1} > 2, \text{ 可得 } \frac{x-1}{x+1} - 2 > 0, \text{ 所以 } \frac{-x-3}{x+1} > 0,$$

$$\text{所以 } (-x-3)(x+1) > 0, \text{ 所以 } (x+3)(x+1) < 0, \text{ 所以 } -3 < x < -1,$$

$$\text{所以 } B = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+1} > 2 \right\} = (-3, -1), \text{ 所以 } \partial_U B = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty),$$

$$\text{所以 } A \cap B = [-2, 6] \cap (-3, -1) = [-2, -1),$$

$$A \cup (\partial_U B) = [-2, 6] \cup (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty) = (-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$$

$$(2) \quad \text{由 } |x-a| \geq 2, \text{ 解得 } x \geq a+2 \text{ 或 } x \leq a-2,$$

$$\text{所以 } C = \{x \mid |x-a| \geq 2\} = (-\infty, a-2] \cup [a+2, +\infty),$$

若“ $x \in A$ ”是“ $x \in C$ ”的充分条件, 则 $A \subseteq C$,

由 (1) 知 $A = [-2, 6]$, 所以 $a-2 \geq 6$ 或 $a+2 \leq -2$,

所以 $a \geq 8$ 或 $a \leq -4$,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -4] \cup [8, +\infty)$.

$$17. (1) f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-4}, & x < 0 \\ \frac{4x}{x+4}, & x \geq 0 \end{cases};$$

(2) 单调递减, 证明见解析;

$$(3) -1 \leq m \leq 1.$$

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、由奇偶性求函数解析式、函数不等式恒成立问题

【分析】(1) 利用偶函数的定义求出函数解析式即得.

(2) 变形函数式并判断单调性, 再利用单调性定义推理即得.

(3) 利用(2)的结论结合偶函数性质确定在 $(0, +\infty)$ 上单调性并脱去法则, 再利用恒成立的不等式求解即得.

【详解】(1) 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{4x}{x+4}$,

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 因此 $f(x) = f(-x) = \frac{4(-x)}{-x+4} = \frac{4x}{x-4}$,

所以函数 $f(x)$ 的解析式是 $f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-4}, & x < 0 \\ \frac{4x}{x+4}, & x \geq 0 \end{cases}$.

(2) 由(1)知, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的单调递减,

$$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0), x_1 < x_2, \quad f(x_1) - f(x_2) = \frac{16}{x_1-4} - \frac{16}{x_2-4} = \frac{16(x_2-x_1)}{(x_1-4)(x_2-4)},$$

由 $x_1 < x_2 < 0$, 得 $x_1-4 < 0, x_2-4 < 0, x_2-x_1 > 0$, 则 $\frac{16(x_2-x_1)}{(x_1-4)(x_2-4)} > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的单调递减.

(3) 由(2)知, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的单调递减, 而 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调递增, 不等式 $f(2x^2+1) > f(m) \Leftrightarrow f(2x^2+1) > f(|m|)$,

于是 $|m| < 2x^2+1$, 依题意, 关于 x 的不等式 $|m| < 2x^2+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

当 $x > 0$ 时, 恒有 $2x^2+1 > 1$, 因此 $|m| \leq 1$, 解得 $-1 \leq m \leq 1$,

所以 m 的取值范围是 $-1 \leq m \leq 1$.

18. (1) 证明见解析;

(2) 4;

(3) 不存在, 理由见解析.

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、利用函数单调性求最值或值域、判断一般幂函数的单调性、函数不等式恒成立问题

【分析】(1) 利用增函数的定义推理证明.

(2) 根据给定条件, 分离参数, 利用函数 $g(x)$ 的单调性求出最小值即可.

(3) 假定存在, 构造方程, 借助函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值推理判断即得.

【详解】(1) 函数 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 < x_2$,

$$g(x_1) - g(x_2) = x_1^2 + \frac{2}{x_1} - x_2^2 - \frac{2}{x_2} = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - \frac{2}{x_1 x_2}),$$

当 $1 < x_1 < x_2$ 时, $x_1 - x_2 < 0, x_1 + x_2 > 2, x_1 x_2 > 1$, 则 $\frac{2}{x_1 x_2} < 2$, $g(x_1) - g(x_2) < 0$,

因此 $g(x_1) < g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 是 $(1, +\infty)$ 上的单调递增函数.

(2) 对任意 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, $f(x) \geq \frac{m}{x} - \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq \frac{m}{x} - \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{2}{x}$ 恒成立,

即 $\forall x \in [\frac{1}{2}, 2]$, $m-1 \leq g(x)$, 而函数 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

因此 $g(x)_{\min} = g(1) = 3$, 则 $m-1 \leq 3$, 解得 $m \leq 4$, $m_{\max} = 4$,

所以实数 m 的最大值为 4.

(3) 由幂函数 $y = x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 得函数 $h(x) = x^3 + 2$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

若存在正实数 a, b , 使得函数 $h(x) = x^3 + 2$, $x \in [a, b]$ 的值域为 $[a, b]$,

则 $\begin{cases} h(a) = a \\ h(b) = b \end{cases}$, 正实数 $a, b (a < b)$ 是方程 $h(x) = x$, 即 $x^3 - x + 2 = 0$ 的两个不等的正根,

$x > 0$, 由 $x^3 - x + 2 = 0$, 得 $x^2 + \frac{2}{x} = 1$, 即 $g(x) = 1$,

函数 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值 $g(1) = 3$, 因此方程 $g(x) = 1$ 无实数解, 即方程 $x^3 - x + 2 = 0$ 无实数解,

所以不存在存在正实数 a, b , 使得函数 $h(x) = x^3 + 2$, $x \in [a, b]$ 的值域为 $[a, b]$.

19. (1) 奇函数, 证明见解析;

(2) (i) $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递减, 在 $(2, +\infty)$ 上递增, $g(x)$ 在 $(0, 1), [2, 4]$ 上递减, 在 $[1, 2), (4, +\infty)$ 上递增, ;

(ii) 存在, $[\frac{4}{3}, 2]$.

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、利用函数单调性求最值或值域、函数奇偶性的定义与判断

【分析】(1) 利用函数奇偶性定义判断证明.

(2) (i) 利用单调性定义求出 $f(x)$ 的单调区间, 进而求出 $g(x)$ 的单调区间; (ii) 假定存在, 分类讨论并结合单调性求值域建立方程求解即得.

【详解】(1) 函数 $f(x)$ 是奇函数,

函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -(x + \frac{4}{x}) = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

(2) (i) $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2$, $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{4}{x_1} - x_2 - \frac{4}{x_2} = (x_1 - x_2) \cdot \frac{x_1 x_2 - 4}{x_1 x_2}$,

由 $0 < x_1 < x_2$, 得 $x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 > 0$,

当 $x_2 \leq 2$ 时, $x_1 x_2 < 4$, 则 $f(x_1) > f(x_2)$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减;

当 $x_1 \geq 2$ 时, $x_1 x_2 > 4$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$, 函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x > 0$ 时, $g(x) = \left| x + \frac{4}{x} - 5 \right| = \begin{cases} x + \frac{4}{x} - 5, x \in (0, 1) \cup (4, +\infty) \\ -x - \frac{4}{x} + 5, x \in [1, 4] \end{cases}$,

因此函数 $g(x)$ 在 $(0, 1), [2, 4]$ 上单调递减, 在 $[1, 2), (4, +\infty)$ 上单调递增.

(ii) 由 (i) 知, 函数 $g(x)$ 在 $(0,1), [2,4]$ 上单调递减, 在 $[1,2), (4,+\infty)$ 上单调递增, 假设存在区间 $[a,b](a>0)$ 符合条件,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } [a,b] \subseteq (0,1] \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上单调递减, 则 } \begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}b \\ g(b) = \frac{1}{2}a \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a + \frac{4}{a} - 5 = \frac{1}{2}b \\ b + \frac{4}{b} - 5 = \frac{1}{2}a \end{cases},$$

化简得 $(a-b)(a+b-5)=0$, 而 $a, b \in (0,1], a < b$,

因此 $(a-b)(a+b-5)=0$ 不成立, 即 a, b 无解, 不存在;

$$\textcircled{2} \text{ 当 } [a,b] \subseteq [1,2] \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上单调递增, 则 } \begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}a \\ g(b) = \frac{1}{2}b \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -a - \frac{4}{a} + 5 = \frac{1}{2}a \\ -b - \frac{4}{b} + 5 = \frac{1}{2}b \end{cases},$$

a, b 是方程 $-x - \frac{4}{x} + 5 = \frac{1}{2}x$, 即 $3x^2 - 10x + 8 = 0$ 的两个实根,

解得 $a = \frac{4}{3}, b = 2$, 符合题意, 区间 $[a,b]$ 为 $[\frac{4}{3}, 2]$;

$$\textcircled{3} \text{ 当 } [a,b] \subseteq [2,4] \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上单调递减, 则 } \begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}b \\ g(b) = \frac{1}{2}a \end{cases},$$

化简得 $(a-b)(a+b-5)=0$, 而 $a < b$, 则 $a+b=5$, 即 $b=5-a$,

由 $-a - \frac{4}{a} + 5 = \frac{1}{2}(5-a)$, 得 $a^2 - 5a + 8 = 0$, $\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$, 无解, 不存在;

$$\textcircled{4} \text{ 当 } [a,b] \subseteq [4,+\infty) \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上单调递增, 则 } \begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}a \\ g(b) = \frac{1}{2}b \end{cases},$$

a, b 是方程 $-x - \frac{4}{x} + 5 = \frac{1}{2}x$, 即 $3x^2 - 10x + 8 = 0$ 的两个实根, 此方程在 $[4,+\infty)$ 无解, 不存在,

所以存在区间 $[a,b](a>0)$, 使得 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 且 $g(x)$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$, 该区间

为 $[\frac{4}{3}, 2]$.

【点睛】 关键点点睛: 求出函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间, 再按单调性分类讨论是求解问题的关键.