2025-2026年第一学期高二年级11月期中摸底调研

数学学科

（总分：150分；考试时长：120分钟）

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．C

【知识点】已知直线垂直求参数

【分析】根据两直线垂直得到斜率关系，列式求解即可.

【详解】因为直线$l_1: x+(2-k)y+1=0$与$l_2: 2y+3=0$垂直，且直线$l_2: 2y+3=0$斜率为0，

所以直线$l_1: x+(2-k)y+1=0$的斜率不存在，即$2-k=0$，解得$k=2$.

故选：C

2．B

【知识点】直线的点斜式方程及辨析、过圆上一点的圆的切线方程

【分析】根据切线性质可知切线l斜率$k=-2$，进而可求切线方程.

【详解】因为圆$x^2+y^2=5$的圆心为$O(0,0)$，

且$(-2)^2+(-1)^2=5$，可知点$M(-2,-1)$在圆上，

则$k_{OM}=\dfrac{1}{2}$，可得切线l斜率$k=-2$，

所以直线l的方程为$y+1=-2(x+2)$，即$2x+y+5=0$.

故选：B.

3．B

【知识点】斜率与倾斜角的变化关系、直线的一般式方程及辨析

【分析】将一般式方程转化为点斜式方程求出斜率，即可求倾斜角.

【详解】直线$3x-\sqrt{3}y+1=0$化为点斜式得，$y=\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线的斜率为$\sqrt{3}$，所以倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$，

故选：B.

4．B

【知识点】充分条件、判断命题的必要不充分条件、必要条件、已知直线平行求参数

【分析】由题意先求出$l_1 // l_2$时a数值，然后根据充分不必要条件的定义判断即可.

【详解】若$l_1 // l_2$，则$a(3a-2)=-a$，解得$a=0$或$a=\dfrac{1}{3}$

当$a=0$时，直线$l_1: x-1=0$，直线$l_2: (-2)x-2=0$，此时$l_1 // l_2$，

当$a=\dfrac{1}{3}$时，直线$l_1: x+\dfrac{1}{3}y-1=0$，直线$l_2: (-1)x-\dfrac{1}{3}y-2=0$，此时$l_1 // l_2$，

综上，则“$l_1 // l_2$”是“$a=\frac{1}{3}$”的必要不充分条件.

故选：B.

5．D

【知识点】空间向量数量积的应用

【分析】由$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$得$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$，然后两边平方，结合向量数量积的运算求向量的夹角.

【详解】设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，由$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，得$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$，

两边同时平方得$\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{c}^2$，

所以$1-2\times1\times2\cos\theta+4=7$，解得$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，

又$0°\le\theta\le180°$，所以$\theta=120°$.

故选：D

6．B

【知识点】求点到直线的距离、由直线与圆的位置关系求参数、已知圆的弦长求方程或参数

【分析】利用点到直线的距离公式及弦长公式的逆运用计算半径即可.

【详解】易知$C(-1,-2)$到$3x+4y-9=0$的距离为$d=\frac{|3\times(-1)+4\times(-2)-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$，

所以该圆的半径为$r=\sqrt{d^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=5$，

故该圆方程为：$(x+1)^2+(y+2)^2=25$.

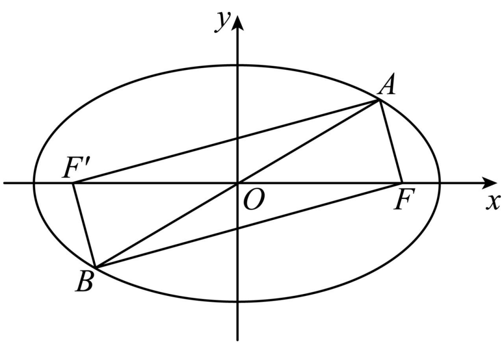
故选：B

7．B

【知识点】求椭圆的离心率或离心率的取值范围

【分析】设椭圆的左焦点为F'，则由已知条件结合椭圆的性质可得四边形$AF'BF$为矩形，得$|AB|=|FF'|=2c$，然后在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，表示出$|BF|,|AF|$，再利用椭圆的定义列方程化简可求出离心率.

【详解】设椭圆的左焦点为F'，



因为$AF\perp BF$，所以根据椭圆的对称性可知：四边形$AF'BF$为矩形，

所以$|AB|=|FF'|=2c$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，$|AF|=2c\sin\dfrac{\pi}{12},|BF|=2c\cos\dfrac{\pi}{12}=|AF'|$，

根据椭圆定义可知：$|AF|+|AF'|=2a$，

所以$2c\sin\dfrac{\pi}{12}+2c\cos\dfrac{\pi}{12}=2a$，

所以$\sqrt{2}c\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}\right)=a$，$\sqrt{2}c\sin\dfrac{\pi}{3}=a$，所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以离心率为$\mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

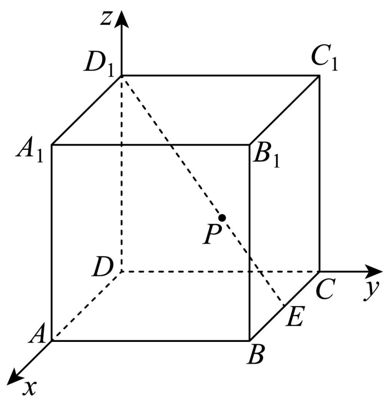
故选：B．

8．A

【知识点】点到直线距离的向量求法

【分析】建立空间直角坐标系利用空间向量求得点P到直线AA_1的距离的表达式，再由二次函数性质可求得最小值.

【详解】以D为坐标原点，DA,DC,DD_1所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系，如下图所示：



则$D_1(0,0,2),E(1,2,0),A(2,0,0),A_1(2,0,2)$，可得$\overrightarrow{D_1E}=(1,2,-2),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，

设$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1E}=P(\lambda,2\lambda,-2\lambda),\lambda\in[0,1]$，所以可得$P(\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$；

因此$\overrightarrow{A_1P}=(\lambda-2,2\lambda,-2\lambda)$，

因此点P到直线AA_1的距离为$\sqrt{\left|\overrightarrow{A_1P}\right|^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|}\right)^2}=\sqrt{(\lambda-2)^2+4\lambda^2+4\lambda^2-\dfrac{(-4\lambda)^2}{2^2}}=\sqrt{5\lambda^2-4\lambda+4}$

$=\sqrt{5\left(\lambda-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{16}{5}}\geq\sqrt{\dfrac{16}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

当$\lambda=\dfrac{2}{5}$（满足题意）时，取得最小值，即点P到直线AA_1的距离的最小值为$\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$.

故选：A

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．BC

【知识点】根据椭圆方程求 a、b、c、求椭圆的焦点、焦距、求椭圆的长轴、短轴、求椭圆的离心率或离心率的取值范围

【分析】根据椭圆的几何性质即可逐一求解.

【详解】对于椭圆 M： $x^2+\frac{y^2}{26}=1$，可得 $a^2=26,b^2=1,c^2=a^2-b^2=25$，

故椭圆的焦点在 y 轴上，焦距为 $2c=10$，离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$，

长轴长为 $2a=2\sqrt{26}$，短轴长为 $2b=2$，故 AD 错误，BC 正确.

故选：BC

10．ABC

【知识点】等差数列与等比数列综合应用、数列新定义

【分析】根据比等差数列定义直接验证可判断 A；令 $b_n=1$，依定义验证可判断 B；令 $a_n=0$，$b_n=1$，然后依定义验证可判断 C；根据递推公式求出前 4 项，然后依定义验证可判断 D.

【详解】若 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $q\neq 0$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}=0=k\neq 1$，故选项 A 错误；

若 $b_n=1$，$\{b_n\}$ 是等差数列，则 $\frac{b_{n+1}}{b_n}-\frac{b_n}{b_{n-1}}=0$，故 $\{b_n\}$ 为比等差数列，故选项 B 错误；

令 $a_n=0$，$b_n=1$，则 $a_n\cdot b_n=0$，此时 $\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}-\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}$ 无意义，故选项 C 错误；

因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\left(n\geq 2\right)$，

所以 $a_3=2$，$a_4=3$，故 $\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}=1\neq\frac{a_4}{a_3}-\frac{a_3}{a_2}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\{a_n\}$ 不是比等差数列，故选项 D 正确.

故选：ABC.

11．ABC

【知识点】用定义求向量的数量积、已知点到直线距离求参数、轨迹问题——圆、由直线与圆的位置关系求参数

【分析】先设出 $P_i\left(m,n\right)$，利用 $\overrightarrow{P_iA}\cdot\overrightarrow{P_iB}=\frac{3}{2}$ 求出 $P_i\left(m,n\right)$ 在以原点为圆心，半径为 2 的圆上，数形结合转化为 $k<0$ 且只需原点到直线 $y=k\left(x-1\right)+2$ 的距离小于半径 2 即可，用点到距离公式列出不等式，求出 k 的取值范围.

【详解】设 $P_i\left(m,n\right)$，连接 P_iO，设 $\angle AP_iO=\angle BP_iO=\theta$，

则 $|P_iO|=\sqrt{m^2+n^2}$， $\sin\theta=\frac{1}{|P_iO|}=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$，

所以 $\cos\angle AP_iB=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-\frac{2}{m^2+n^2}$，

又 $|P_iA|=|P_iB|=\sqrt{m^2+n^2-1}$，

所以 $\overrightarrow{P_iA}\cdot\overrightarrow{P_iB}=|P_iA|\cdot|P_iB|\cos\angle AP_iB=\left(\sqrt{m^2+n^2-1}\right)^2\left(1-\frac{2}{m^2+n^2}\right)=\frac{3}{2}$

令 $m^2+n^2=t$，则有 $(t-1)\left(1-\frac{2}{t}\right)=\frac{3}{2}$，

解得：$t=4$ 或 $\frac{1}{2}$

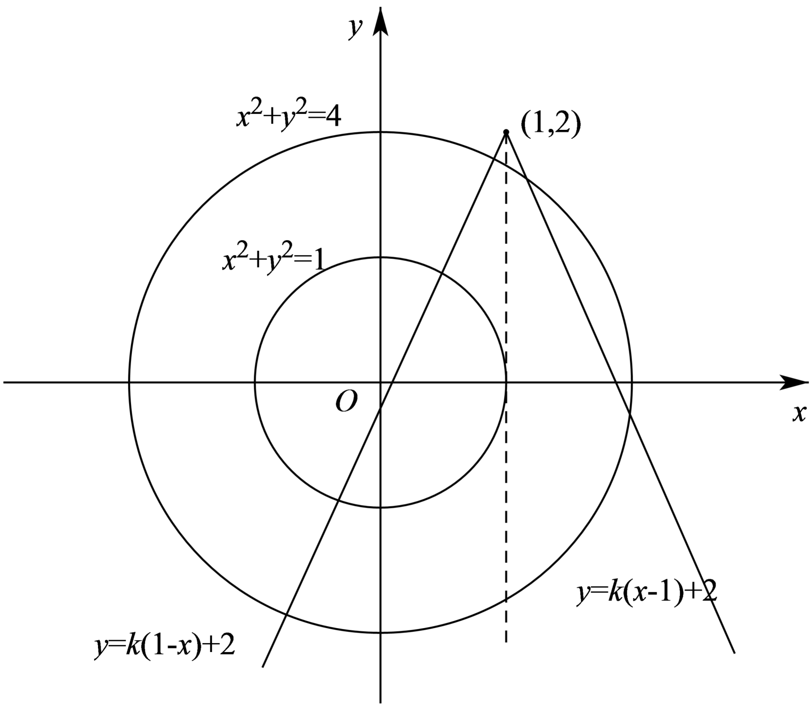
因为 $P_i(m,n)$ 在单位圆外，所以 $t=\frac{1}{2}$ 舍去，

即 $P_i(m,n)$ 在以原点为圆心，半径为 2 的圆上，

因为曲线 $y=k|x-1|+2$ 上存在四个点 P_i（i=1，2，3，4），

即 $y=k|x-1|+2$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有 4 个交点，

结合图象可知，$k<0$ 且只需原点到直线 $y=k(x-1)+2$ 的距离小于半径 2 即可，



所以 $\frac{|k-2|}{\sqrt{1+k^2}}<2$，解得：$k<-\frac{4}{3}$ 或 $k>0$（舍去），

故选：ABC

【点睛】数形结合的思想对于求解函数零点或交点个数问题经常使用，要能抓住一些不变量，比如本题中的直线方程过定点$(1,2)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．6

【知识点】累加法求数列通项

【分析】已知$S_n=2(a_n+1)$，利用$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，求出$\{a_n\}$通项，然后即可求解

【详解】$\because S_n=2(a_n+1)$，$\therefore$当$n=1$时，$S_1=2(a_1+1)$，$\therefore a_1=-2$；当$n\geq 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，$\therefore a_n=2a_{n-1}$，故数列$\{a_n\}$是首项为-2，公比为 2 的等比数列，$\therefore a_n=-2^n$．

又$S_n=2(a_n+1)=-126$，$\therefore a_n=-64$，$\therefore -2^n=-64$，$\therefore n=6$．

【点睛】本题考查通项求解问题，属于基础题

13．5（答案不唯一）

【知识点】根据数列递推公式写出数列的项

【分析】由条件可得$(a_n-a_{n-1})(a_n-2a_{n-1})=0$，即有$a_n=a_{n-1}$或$a_n=2a_{n-1}$，结合$a_1=1$运算即可得．

【详解】因为$a_n^2-3a_na_{n-1}+2a_{n-1}^2=0\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，

即$(a_n-a_{n-1})(a_n-2a_{n-1})=0$，

所以$a_n=a_{n-1}$或$a_n=2a_{n-1}$，

又$a_1=1$，故该数列前 5 项可能为：1、1、1、1、1，或 1、1、1、1、2，

或 1、1、1、2、2，或 1、1、2、2、2，或$\cdots$，或 1、2、4、8、8，或 1、2、4、8、16，

该数列前 5 项和可能是 5、6、7、8、$\cdots$、23、31．

故答案为：5（答案不唯一）．

14．$\left[2\sqrt{3}-1,2\sqrt{3}+1\right]$

【知识点】轨迹问题——圆、定点到圆上点的最值（范围）

【分析】以MA,MB为邻边，作矩形$MADB$，则$AB=MD$，证明出$OA^2+OB^2=OM^2+OD^2$，从而得到$OD=2\sqrt{3}$，点D的轨迹为以O为圆心，$2\sqrt{3}$为半径的圆，数形结合得到$2\sqrt{3}-1\leq|MD|\leq 2\sqrt{3}+1$，得到答案.

【详解】以MA,MB为邻边，作矩形$MADB$，则$AB=MD$，

由矩形性质可得$OA^2+OB^2=OM^2+OD^2$，证明如下：

设$AM=DB=m,BM=AD=n,\angle MAO=\theta$，

过点M,B,D分别为$MQ\perp OA$，$BE\perp OA$，$DW\perp OA$，垂足分别为Q,E,W，

过点M作$MF\perp BE$，垂足为F，

则$MQ=EF=m\sin\theta,AQ=m\cos\theta,AW=MF=QE=n\sin\theta,DW=BF=n\cos\theta$，

故$OM^2=OQ^2+MQ^2=OQ^2+m^2\sin^2\theta$，

$OD^2=\left(OQ+AQ+AW\right)^2+DW^2=\left(OQ+m\cos\theta+n\sin\theta\right)^2+n^2\cos^2\theta$

$=OQ^2+m^2\cos^2\theta+2OQm\cos\theta+2OQn\sin\theta+2mn\cos\theta\sin\theta+n^2$ ，

所以 $OM^2+OD^2=2OQ^2+m^2+n^2+2OQm\cos\theta+2OQn\sin\theta+2mn\cos\theta\sin\theta$，

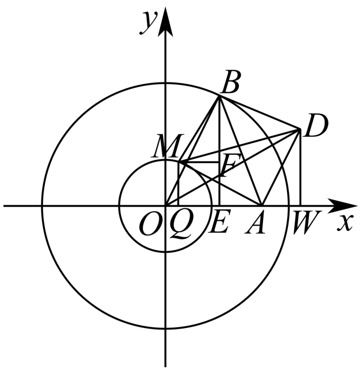
$OB^2=\left(OQ+QE\right)^2+\left(BF+EF\right)^2=\left(OQ+n\sin\theta\right)^2+\left(n\cos\theta+m\sin\theta\right)^2$

$=OQ^2+2OQn\sin\theta+n^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta+2mn\cos\theta\sin\theta+m^2\sin^2\theta$ ，

$OA^2=\left(OQ+AQ\right)^2=\left(OQ+m\cos\theta\right)^2=OQ^2+2OQm\cos\theta+m^2\cos^2\theta$，

所以 $OB^2+OA^2=2OQ^2+m^2+n^2+2OQm\cos\theta+2OQn\sin\theta+2mn\cos\theta\sin\theta$ ，

证毕，



即 $4+9=1+OD^2$，故 $OD^2=12,OD=2\sqrt{3}$，

点 D 的轨迹为以 O 为圆心，$2\sqrt{3}$ 为半径的圆，

所以 $2\sqrt{3}-1=|OD|-|OM|\le|MD|\le|OD|+|OM|=2\sqrt{3}+1$ ，

左边等号成立的条件为 O,M,D 三点共线，且 O 在 M,D 之间，
右边等号成立的条件为 O,M,D 三点共线，且 M 在 O,D 之间，

则 $|AB|$ 的取值范围是 $\left[2\sqrt{3}-1,2\sqrt{3}+1\right]$

故答案为：$\left[2\sqrt{3}-1,2\sqrt{3}+1\right]$

【点睛】关键点点睛：作出辅助线，得到 $AB=MD$，证明出 $OA^2+OB^2=OM^2+OD^2$，从而得到 $OD=2\sqrt{3}$，得到 D 点轨迹，数形结合进行求解.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．(1) $a_n=8n-4$

(2) $k=5$

(3) $\frac{n}{64(n+1)}$

【知识点】等比中项的应用、裂项相消法求和、利用 an 与 sn 关系求通项或项

【分析】（1）由 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=\frac{a_n}{2}(n\geq 2)$，求得 $\sqrt{S_n}=2n$ ，进而得出 $a_n=8n-4$；

（2）利用等比中项的性质列方程，解一元二次方程即可；

（3）利用裂项相消法求和即可.

【详解】（1）在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，又 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=\frac{a_n}{2}(n\geq 2)$，且 $a_n>0$，

两式相除得 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=2(n\geq 2)$，$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=2$，

所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 2 为首项，公差为 2 的等差数列，则 $\sqrt{S_n}=2+2(n-1)=2n$ ，

所以 $S_n=4n^2$，

当 $n\geq 2$，$a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2-4(n-1)^2=8n-4$，当 $n=1$ 时，$a_1=4$，也满足上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=8n-4$；

（2）由（1）得 $a_{k-1}=8k-12$，$S_{k+2}=4(k+2)^2$，因为 a_{k-1} 是 a_1 和 S_{k+2} 的等比中项，

所以 $(8k-12)^2=4\times 4(k+2)^2$，即 $3k^2-16k+5=0$，解得 $k=5$ 或 $k=\frac{1}{3}$（舍去）；

（3）$b_n=\frac{1}{a_n^2-16}=\frac{1}{(8n-4)^2-16}=\frac{1}{64}\times\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{64}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right](n\geq 2)$，

所以数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和 $T_n=\frac{1}{64}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{n}{64(n+1)}$.

16. (1) $(2,6)$

(2) $3x+y+18=0$

【知识点】求点关于直线的对称点、求直线关于点的对称直线

【分析】（1）根据点关于线对称列式求解即可；

（2）根据相关点法分析运算即可.

【详解】（1）设 $A'(m,n)$，由题意可得 $\begin{cases}\frac{n-4}{m+4}\times(-3)=-1\\ 3\times\frac{m-4}{2}+\frac{n+4}{2}-2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=2\\ n=6\end{cases}$，

所以点 A' 的坐标为 $(2,6)$.

（2）在直线 l 上任取一点 $P(x,y)$，设 $P(x,y)$ 关于点 A 的对称点为 $P'(x_0,y_0)$，

则$\begin{cases}\dfrac{x_0+x}{2}=-4\\ \dfrac{y_0+y}{2}=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=-8-x\\ y_0=8-y\end{cases}$，

由于$P'\left(-8-x,8-y\right)$在直线$3x+y-2=0$上，则$3\left(-8-x\right)+\left(8-y\right)-2=0$，即$3x+y+18=0$，

故直线l关于点A的对称直线l'的方程为$3x+y+18=0$.

17．(1)$x-y-4=0$

(2)$x+y+1=0$或$x-2y+4=0$

【知识点】求抛物线的切线方程、抛物线的中点弦

【分析】（1）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，设直线l的方程为$x-6=m\left(y-2\right)$，代入抛物线方程，应用韦达定理，利用中点坐标求得参数值得直线方程；

（2）设切线方程$x+2=t\left(y-1\right)$，代入抛物线方程后由判别式为0求得参数值，得切线方程.

【详解】（1）当直线l的斜率为0时，l与抛物线C只有一个交点，故不合题意，

所以直线l的斜率不为0，设直线l的方程为$x-6=m\left(y-2\right)$

由$\begin{cases}x-6=m\left(y-2\right)\\ y^2=4x\end{cases}$，消去$x$得$y^2-4my+8m-24=0$

则$\Delta=16m^2-4\left(8m-24\right)=16\left(m^2-2m+6\right)>0$

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，所以$y_1+y_2=4m$

因为MN的中点为$(6,2)$，所以$y_1+y_2=4m=4$，

所以$m=1$，所以直线l的方程为$x-6=y-2$，

即$x-y-4=0$；

（2）若过点P的切线斜率为0，则该直线与抛物线相交，所以不合题意，

所以过点P的切线设为$x+2=t\left(y-1\right)$

由$\begin{cases}x+2=t\left(y-1\right),\\ y^2=4x\end{cases}$消去$x$得$y^2-4ty+4t+8=0$,

则有$\Delta=16t^2-4\left(4t+8\right)=16\left(t^2-t-2\right)=16\left(t+1\right)\left(t-2\right)=0$

所以$t=-1$或$t=2$，

所以所求切线方程为$x+2=-\left(y-1\right)$或$x+2=2\left(y-1\right)$

即$x+y+1=0$或$x-2y+4=0$.

18．(1)$x^2=4y$

(2)证明见解析，定点坐标为$\left(0,1\right)$

【知识点】利用抛物线定义求动点轨迹、抛物线中的直线过定点问题

【分析】（1）根据抛物线的定义求得正确答案.

（2）先求得 D 点坐标，然后根据直线平行求得 E 点坐标，再根据直线 AE 的方程求得定点坐标.

【详解】（1）依题意可知，动点 P 到点 $F(0,1)$ 的距离等于它到直线 $y=-1$ 的距离，

所以 P 的轨迹是抛物线，且 $\frac{p}{2}=1,2p=4$，所以轨迹 C 的方程为 $x^2=4y$.

（2）设 $A\left(t,\frac{t^2}{4}\right)$，则 $|FA|=\frac{t^2}{4}+1=|y_D-1|=|FD|$，由于 D 在 y 轴的正半轴，

所以 $y_D=\frac{t^2}{4}+2$，则 $D\left(0,\frac{t^2}{4}+2\right)$，$k_{AD}=\frac{\frac{t^2}{4}+2-\frac{t^2}{4}}{0-t}=\frac{2}{-t}$，

设 $E\left(s,\frac{s^2}{4}\right)$，$l_1$ 的方程为 $y-\frac{s^2}{4}=\frac{2}{-t}(x-s),y=\frac{2}{-t}(x-s)+\frac{s^2}{4}$，

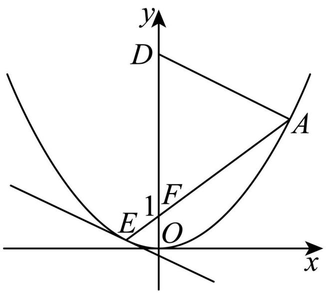
由 $\begin{cases} y=\frac{2}{-t}(x-s)+\frac{s^2}{4} \\ x^2=4y \end{cases}$，消去 y 得 $x^2=4\left[\frac{2}{-t}(x-s)+\frac{s^2}{4}\right]=\frac{8}{-t}(x-s)+s^2$，

$x^2+\frac{8}{t}x-\frac{8}{t}s-s^2=0$，由 $\Delta=\frac{64}{t^2}+4\left(\frac{8s}{t}+s^2\right)=\frac{64}{t^2}+\frac{32}{t}s+4s^2=0$，

$s^2+\frac{8}{t}s+\frac{16}{t^2}=\left(s+\frac{4}{t}\right)^2=0$，解得 $s=-\frac{4}{t}$，则 $E\left(-\frac{4}{t},\frac{4}{t^2}\right)$，

所以直线 AE 的方程为 $y-\frac{t^2}{4}=\frac{\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t^2}}{t+\frac{4}{t}}(x-4)$，

整理得 $y=\frac{t^2-4}{4t}x+1$，所以直线 AE 过定点 $(0,1)$.



【点睛】思路点睛：通过抛物线定义求轨迹：首先利用动点的轨迹符合抛物线的定义，结合焦点和准线，求解轨迹的方程,这是确保解题正确的基础.

利用直线相交条件确定定点：通过设定直线与轨迹有且仅有一个公共点的条件，结合消去法，确定直线过定点并求定点坐标.

19．(1) $x^2+(y+2)^2=25$.

(2) $4x+3y+21=0$ 或 $x=-3$.

(3)是，25.

【知识点】由圆心（或半径）求圆的方程、已知圆的弦长求方程或参数、直线与圆的实际应用

【分析】（1）利用圆的标准方程，结合题目条件，得圆心 C 的坐标和半径，从而得结论；

（2）利用垂径定理得圆心 $C\left(0,-2\right)$ 到直线 l_2 的距离为 3，再利用直线与圆的位置关系，结合对斜率是否存在的讨论和点到直线的距离公式，计算得结论；

（3）利用关于直线对称的圆的方程得圆 Q 的方程，再利用题目条件得 $M_1\left(-x_1,-y_1\right)$、$M_2\left(x_1,-y_1\right)$，且得到 $x_1\neq x_2$，$x_1\neq -x_2$，再利用直线的点斜式方程得直线 PM_1 和 PM_1 的方程，令 $x=0$ 得 m 与 n，最后利用圆 Q 的方程，计算得结论.

【详解】（1）解：因为圆心 C 在直线 l_1：$x-y-2=0$ 上，所以设 $C\left(a,\ a-2\right)$.

又因为圆 C 经过点 $A\left(5,-2\right)$ 和 $B\left(3,2\right)$，

所以 $\left(5-a\right)^2+\left(-2-a+2\right)^2=\left(3-a\right)^2+\left(2-a+2\right)^2$，且半径 $r=\sqrt{\left(3-a\right)^2+\left(4-a\right)^2}$，解得 $a=0$，$r=5$，

因此圆 C 的标准方程为 $x^2+\left(y+2\right)^2=25$.

（2）解：因为直线 l_2 被圆 C 所截得的弦长为 8，

所以由垂径定理得圆心 $C\left(0,-2\right)$ 到直线 l_2 的距离为 $\sqrt{5^2-(\frac{8}{2})^2}=3$.

① 当直线 l_2 的斜率不存在时，直线 l_2：$x=-3$ 满足要求；

② 当直线 l_2 的斜率存在时，不妨设直线 l_2 的方程为 $y+3=k\left(x+3\right)$，即 $kx-y+3k-3=0$，

由圆心 $C\left(0,-2\right)$ 到直线 l_2 的距离 $d=\dfrac{\left|2+3k-3\right|}{\sqrt{k^2+\left(-1\right)^2}}=3$，解得 $k=-\dfrac{4}{3}$，因此直线 l_2 的方程为

$4x+3y+21=0$.

综上所述，直线 l_2 的方程为 $4x+3y+21=0$ 或 $x=-3$.

（3）解：因为 $C\left(0,-2\right)$ 关于直线 $y=-1$ 的对称点为 $\left(0,0\right)$，而圆 C 关于直线 $y=-1$ 的对称圆是圆 Q，

所以圆 Q 的方程为 $x^2+y^2=25$.

因为点 $M\left(x_1,\ y_1\right)$ 关于原点和 x 轴的对称点分别为 M_1、M_2，所以 $M_1\left(-x_1,-y_1\right)$、$M_2\left(x_1,-y_1\right)$.

又因为 $P(x_2,\ y_2)$，

当 $x_1=x_2$ 时，点 M_2 的坐标为 $M_2\left(x_2,-y_1\right)$，则直线 PM_2 与 x 轴垂直，不满足题意，所以 $x_1\neq x_2$.

当 $x_1=-x_2$ 时，点 M_1 的坐标为 $M_1\left(x_2,-y_1\right)$，则直线 PM_1 与 x 轴垂直，不满足题意，所以 $x_1\neq -x_2$，

因此直线 PM_1 的方程为 $y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\left(x+x_1\right)$，直线 PM_2 的方程为 $y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$.

在方程 $y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\left(x+x_1\right)$ 中，令 $x=0$ 得 $y=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\times x_1-y_1$，即 $m=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\times x_1-y_1=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}$.

在方程 $y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$ 中，令 $x=0$ 得 $y=-\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\times x_1-y_1$，即 $n=-\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\times x_1-y_1=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}$.

又因为 $M\left(x_1,\ y_1\right)$、$P(x_2,\ y_2)$ 是圆 Q 上的两个动点，所以 $x_1^2+y_1^2=25$，$x_2^2+y_2^2=25$，

因此 $m\cdot n=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}\cdot\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}=\frac{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{x_1^2\left(25-x_2^2\right)-x_2^2\left(25-x_1^2\right)}{x_1^2-x_2^2}=25$，

因此 $m\cdot n$ 为定值.