

2025-2026 年第一学期高二年级 11 月期中摸底调研

数学学科

(总分: 150 分; 考试时长: 120 分钟)

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. D

【知识点】直线的倾斜角、直线斜率的定义、直线的一般式方程及辨析

【分析】根据直线的斜率求直线的倾斜角.

【详解】由直线 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ 得其斜率为 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

设直线的倾斜角为 θ ($\theta \in [0, \pi)$), 则 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\theta = \frac{5\pi}{6}$, 所以直线的倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$,

故选: D

2. B

【知识点】由标准方程确定圆心和半径、判断圆与圆的位置关系

【分析】根据题意, 求出两圆的圆心距, 再结合圆与圆位置关系的判断方法, 即可求解.

【详解】因为圆 $C_1: x^2 + y^2 + 10x + 10y = 0$ 的圆心为 $C_1(-5, -5)$, 半径为 $r_1 = 5\sqrt{2}$,

圆 $C_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$ 的圆心为 $C_2(3, 3)$, 半径为 $r_2 = 3\sqrt{2}$,

$\therefore |C_1C_2| = \sqrt{(3+5)^2 + (3+5)^2} = 8\sqrt{2} = r_1 + r_2$,

所以两圆外切.

故选: B.

3. B

【知识点】等差数列通项公式的基本量计算

【分析】根据等差数列的通项公式计算.

【详解】因为 $a_{n+1} - a_n = 4$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差为 4, 又 $a_1 = 1$, 所以

$a_{51} = a_1 + 50d = 1 + 50 \times 4 = 201$,

故选: B.

4. B

【知识点】根据方程表示双曲线求参数的范围

【分析】根据双曲线方程的特征, 列式求解.

【详解】若方程 $\frac{x^2}{k-1} + \frac{y^2}{k-3} = 1$ 表示双曲线,

则 $(k-1)(k-3) < 0$, 得 $1 < k < 3$.

故选: B

5. B

【知识点】抛物线的焦半径公式

【分析】根据焦半径公式求点 M 的坐标, 即可求解.【详解】设 $M(x, y)$, $F(2, 0)$, $|MF| = x + \frac{p}{2} = x + 2 = 7$, 得 $x = 5$,所以点 M 到 y 轴的距离为 5.

故选: B.

6. C

【知识点】等比数列的定义、由定义判定等比数列

【分析】根据 a, b, c, d 成等比数列, 设其公比为 $q (q \neq 1)$, 利用等比数列的定义即可结合所给式子进行判断.【详解】 a, b, c, d 成等比数列, 设公比为 q , 则 a, b, c, d 均不为 0, 且 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = q$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2} = q^2$, 故 a^2, b^2, c^2, d^2 成等比数列, 且公比为 q^2 , $\frac{bc}{ab} = \frac{c}{a} = q^2, \frac{cd}{bc} = \frac{d}{b} = q^2$, 因此 ab, bc, cd 成等比数列, 且公比为 q^2 , $a - b = a(1 - q), b - c = b(1 - q) = aq(1 - q), c - d = aq^2(1 - q)$, 当 $q \neq 1$ 时, 成等比数列, 且公比为 q ,但当 $q = 1$ 时, 不是等比数列,

故选: C

7. C

【知识点】等比数列下标和性质及应用

【分析】利用高斯算法可推出 $f(a_1) + f(a_{2024}) = 1$, 再利用等比数列性质即可类比得出 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{2024}) = 1012$.【详解】根据 $a_1 a_{2024} = 1$ 可得 $a_{2024} = \frac{1}{a_1}$,所以 $f(a_1) + f(a_{2024}) = \frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_{2024}} = \frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{1 + a_1} + \frac{a_1}{1 + a_1} = 1$;由等比数列性质可得 $a_1 a_{2024} = a_2 a_{2023} = a_3 a_{2022} = \cdots = a_{1012} a_{1013} = 1$,

因此可得

 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{2024}) = f(a_1) + f(a_{2024}) + f(a_2) + f(a_{2023}) + \cdots + f(a_{1012}) + f(a_{1013}) = 1012$.

故选: C

8. B

【知识点】由圆的位置关系确定参数或范围

【分析】两圆有公共点, 则两圆相交或相切, 利用圆心距与半径的关系列不等式求实数 k 的取值范围.

【详解】解法一:

圆 C 的方程化标准方程为 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, 所以圆 C 是以 $(0, 2)$ 为圆心, 1 为半径的圆.

设 $P(x_0, kx_0 - 1)$, 由以 P 为圆心, 1 为半径的圆与圆 $C: x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 有公共点,

得关于 x_0 的不等式 $1 - 1 \leq \sqrt{x_0^2 + (kx_0 - 3)^2} \leq 1 + 1$ 有解, 即 $(k^2 + 1)x_0^2 - 6kx_0 + 5 \leq 0$ 有解,

所以 $\Delta = (6k)^2 - 20(k^2 + 1) \geq 0$, 解得 $k \leq -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $k \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选: B.

解法二:

圆 C 的方程化标准方程为 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, 所以圆 C 是以 $(0, 2)$ 为圆心, 1 为半径的圆.

又直线 $y = kx - 1$ 上存在点 P , 使以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆 C 有公共点,

所以只需圆 $C': x^2 + (y - 2)^2 = 4$ 与直线 $y = kx - 1$ 有公共点即可.

由 $\frac{|-2-1|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 2$, 解得 $k \leq -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $k \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选: B

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. BD

【知识点】斜率与倾斜角的变化关系、直线的斜截式方程及辨析、直线图象的辨析、直线一般式方程与其他形式之间的互化

【分析】A 项举例直线斜率正负特例即可; B 项求与 y 轴交点的纵坐标可得; C 项化一般式方程为点斜式可得; D 项结合图象判断 $k < 0, b > 0$ 可得.

【详解】A 项, 设两条直线斜率分别为 $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_1 > k_2$,

但斜率为 1 的直线倾斜角 $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, 而斜率为 -1 的直线倾斜角为 $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$,

$\alpha_1 < \alpha_2$, 故 A 错误;

B 项, 直线 $y = 3x - 2$, 令 $x = 0$, 得 $y = -2$,

即直线在 y 轴上的截距为 -2, 故 B 正确;

C 项, 直线 $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ 方程可化为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$,

所以直线的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 错误;

D 项, 若直线 $y = kx + b$ 经过第一、二、四象限, 则 $k < 0$, $b > 0$,

所以点 (k, b) 在第二象限, 故 D 正确.

故选: BD.

10. BD

【知识点】圆上点到定直线 (图形) 上的最值 (范围)、判断直线与圆的位置关系、由直线与圆的位置关系求参数、圆的弦长与中点弦

【分析】根据圆心到直线的距离即可求解 ABD, 由平行的斜率关系, 结合弦长公式即可求解 C.

【详解】对于 A: 圆心 $(1,0)$ 到直线 $l: x+y-5=0$ 的距离为 $d = \frac{|1+0-5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > r = \sqrt{2}$, 故直线与圆 C 相离, A 错误,

对于 B, 圆上的点到直线的最小距离为 $d-r = \sqrt{2}$, 故 $|PQ|$ 的取值范围为 $[\sqrt{2}, +\infty)$, B 正确,

对于 C, 设与 $l: x+y-5=0$ 平行的直线为 $x+y+m=0$,

由于圆心到直线的距离为 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2} = 1$, 所以 $d = \frac{|1+0+m|}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}$,

故直线为 $x+y+\sqrt{2}-1=0$ 或 $x+y-\sqrt{2}-1=0$, 故 C 错误,

对于 D, 由于圆上的点到直线的最小距离为 $d-r = \sqrt{2}$, 最大距离为 $d+r = 3\sqrt{2}$,

而 $\sqrt{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2} < 3\sqrt{2}$, 故圆 C 上存在两个点到直线 l 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, D 正确,

故选: BD

11. ACD

【知识点】判断数列的增减性、判断等差数列、由定义判定等比数列、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项

【分析】由等差、等比数列的概念及性质逐个判断即可.

【详解】对于 A, 由 $d > 0$, 可得 $a_n - a_{n-1} > 0$, 故单调递增, 正确;

对于 B, 取 $a_1 = -1$, 此时 $a_n = -q^{n-1}$, 由于 $q \in (0,1)$, 此时数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 错误;

对于 C: 等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 d , 由 $\frac{2^{a_n}}{2^{a_{n-1}}} = 2^{a_n - a_{n-1}} = 2^d$, 为常数, 故数列 $\{2^{a_n}\}$ 为等比数列, 正确;

对于 D: 由 $S_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n \in \mathbb{N}^*)$, 令 $n=1$, 可得: $a_1 = \pm 1$,

可得: $S_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$

即: $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1, (n \geq 2)$,

所以数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 正确,

故选: ACD

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 6.

【知识点】等差数列通项公式的基本量计算

【详解】分析: 由等差数列的通项公式得 $a_2 + a_{10} + a_{12} = 3a_8 = 18$, 由此能求出 a_8 .

详解: $\because$ 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_{10} + a_{12} = 18$,

$\therefore a_2 + a_{10} + a_{12} = a_1 + d + a_1 + 9d + a_1 + 11d = 3a_1 + 21d = 3a_8 = 18$.

解得 $a_8 = 6$.

故答案为 6.

点睛：本题考查数列的第 8 项的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等差数列的性质的合理运用.

$$13. \frac{2\sqrt{3}}{3} / \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围、求弦中点所在的直线方程或斜率

【分析】利用点差法，结合 M 是线段 AB 的中点，直线的斜率为 $\frac{1}{3}$ ，即可求出双曲线 C 的离心率.

【详解】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ ①, $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ ②,

$\because M$ 是线段 AB 的中点,

$$\therefore \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 1, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 1,$$

故过点 $M(1, 1)$ 作斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 AB 的方程是 $y = \frac{1}{3}(x - 1) + 1$,

$$\therefore y_1 - y_2 = \frac{1}{3}(x_1 - x_2)$$

①②两式相减可得:

$$\frac{1}{a^2}(x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{b^2}(y_1^2 - y_2^2) = 0,$$

$$\therefore \frac{1}{a^2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{1}{b^2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0.$$

$$\therefore 2 \times \frac{1}{a^2}(x_1 - x_2) - 2 \times \frac{1}{b^2}(y_1 - y_2) = 0.$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

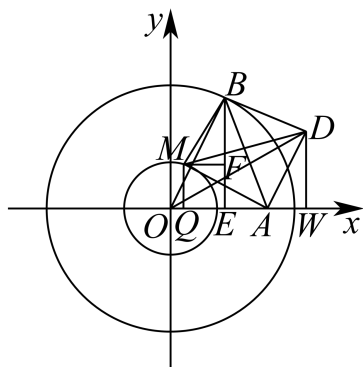
$$14. [2\sqrt{3} - 1, 2\sqrt{3} + 1]$$

【知识点】轨迹问题——圆、定点到圆上点的最值（范围）

【分析】以 MA, MB 为邻边，作矩形 $MADB$ ，则 $AB = MD$ ，证明出 $OA^2 + OB^2 = OM^2 + OD^2$ ，从而得到 $OD = 2\sqrt{3}$ ，点 D 的轨迹为以 O 为圆心， $2\sqrt{3}$ 为半径的圆，数形结合得到 $2\sqrt{3} - 1 \leq |MD| \leq 2\sqrt{3} + 1$ ，得到答案.

【详解】以 MA, MB 为邻边，作矩形 $MADB$ ，则 $AB = MD$ ，由矩形性质可得 $OA^2 + OB^2 = OM^2 + OD^2$ ，证明如下：
设 $AM = DB = m, BM = AD = n, \angle MAO = \theta$,

证毕,



$OD=2\sqrt{3}$, 得到 D 点轨迹, 数形结合进行求解

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (1) $a_n = 2^n$

(2) 10

【知识点】写出等比数列的通项公式、求等比数列前 n 项和、利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项

【分析】(1) 根据等比数列的通项公式可得 $S_n = 2^{n+1} - 2$ ，再利用退一相减法可得 $a_n = 2^n$ ；

(2) 由 $a_n = 2^n$ ，可得 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$ ，即可得 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ ，解不等式，结合 2^n 的单调性可得解。

【详解】(1) 由已知数列 $\{S_n + 2\}$ 是首项为 4，公比为 2 的等比数列，

则 $S_n + 2 = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$ ，即 $S_n = 2^{n+1} - 2$ ，

当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = 2^2 - 2 = 2$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) = 2^n$ ，

综上所述 $a_n = 2^n$ ；

(2) 由 (1) 得 $a_n = 2^n$ ，则 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$ ，

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ ，

所以 $1 - \frac{1}{2^n} < \frac{2023}{2024}$ ，即 $2^n < 2024$ ，

又函数 $y = 2^n$ ， $n \in \mathbb{N}_+$ ，单调递增，

且 $2^{10} = 1024 < 2024$ ， $2^{11} = 2048 > 2024$ ，

即满足 $2^n < 2024$ 的最大正整数为 10，

综上所述满足 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{2023}{2024}$ 的最大正整数为 10。

16. (1) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

(2) $[2, 10]$

【知识点】三角函数的化简、求值——同角三角函数基本关系、求平面两点间的距离、由圆心（或半径）求圆的方程、定点到圆上点的最值（范围）

【分析】(1) 设出圆心 $C(m, m-1)$ ，根据半径相等列出方程，求出 $m=1$ ，得到圆心和半径，得到标准方程；

(2) 设 $P(1 + \cos \theta, \sin \theta)$ ，表达出 $PC^2 + PD^2 = 4 \cos \theta + 6$ ，求出最值，得到取值范围。

【详解】(1) 设圆心 $C(m, m-1)$ ，

因为圆 C 经过 A, B 两点, 所以 $\sqrt{\left(m-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(m-1-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{(m-1)^2 + (m-1-1)^2}$,

解得 $m=1$, 故圆心为 $C(1,0)$,

故半径为 $\sqrt{(1-1)^2 + (1-2)^2} = 1$,

所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$;

(2) 设 $P(1+\cos\theta, \sin\theta)$,

$$\text{则 } PC^2 + PD^2 = (1+\cos\theta-1)^2 + (\sin\theta-0)^2 + (1+\cos\theta+1)^2 + (\sin\theta-0)^2$$

$$= 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta + 4\cos\theta + 4 = 4\cos\theta + 6,$$

当 $\cos\theta=1$ 时, $PC^2 + PD^2$ 取得最大值, 最大值为 10,

当 $\cos\theta=-1$ 时, $PC^2 + PD^2$ 取得最小值, 最小值为 2,

故 $PC^2 + PD^2$ 的取值范围是 $[2, 10]$.

17. (1) $a_n = 2^n$, $b_n = n^2$;

$$(2) \frac{n}{2n+1}.$$

【知识点】由递推关系证明数列是等差数列、裂项相消法求和、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项

【分析】(1) 利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 判断 $\{a_n\}$ 为等比数列, 再求通项公式; 又因为 $a_2 = 4b_1$, 解得 $b_1 = 1$,

再得到 $\frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n}$ 为常数即可求解;

(2) 由 (1) 得 $c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 然后利用裂项相消法即可.

【详解】(1) 已知 $S_n = 2a_n - 2$ ①,

当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 2$, 得 $a_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$ ②,

①-②得: $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $a_n = 2a_{n-1}$,

又 $a_1 = 2 \neq 0$, $a_n \neq 0$, 则 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 则 $a_n = 2^n$.

因为 $a_2 = 4b_1$, 所以 $b_1 = 1$,

又由 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n^2 + n$, 得 $\frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$,

所以 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为1, 公差为1的等差数列, 则 $\frac{b_n}{n} = 1 + n - 1 = n$, 即 $b_n = n^2$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } c_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{则 } T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

$$18. (1) \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(2) \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【知识点】线面角的向量求法、面面角的向量求法、点到平面距离的向量求法

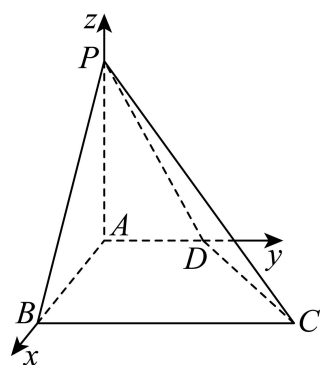
【分析】(1) 建立空间直角坐标系, 求出两平面 PAB 与平面 PCD 的法向量, 利用向量的夹角公式计算可得;

(2) 由 $\frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_2|}$ 可得点 B 到平面 PCD 的距离;

(3) 由平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$, 由 $\cos \langle \overrightarrow{CM}, \vec{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{CM}| \cdot |\vec{n}|}$, 可得 CM 与平面 $ABCD$

所成角的正弦值.

【详解】(1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp AB$, $PA \perp AD$,
又 $AB \perp AD$, 所以 AB, AD, AP 两两垂直,
以 AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.



则 $B(2, 0, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $D(0, 1, 0)$, $C(2, 2, 0)$,

平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (0, 1, 0)$,

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$, 又 $\overrightarrow{PD} = (0, 1, -2)$, $\overrightarrow{DC} = (2, 1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } \vec{n}_2 = (-1, 2, 1),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

设平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 θ , $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{所以 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) $\vec{PB} = (2, 0, -2)$, 设点 B 到平面 PCD 的距离为 d ,

$$d = \frac{|\vec{PB} \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore$ 点 B 到平面 PCD 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(3) $\because M$ 为平面 PBC 内一动点, 设 $M(x', y', z')$,

设 $\vec{BM} = \lambda \vec{BP} + \mu \vec{BC}$, 又 $\vec{BM} = (x' - 2, y', z')$, $\vec{BP} = (-2, 0, 2)$, $\vec{BC} = (0, 2, 0)$,

代入得 $(x' - 2, y', z') = (-2\lambda, 2\mu, 2\lambda)$, 解得点 $M(2 - 2\lambda, 2\mu, 2\lambda)$,

$\therefore \vec{DM} = (2 - 2\lambda, 2\mu - 1, 2\lambda)$, 又 $DM \perp$ 平面 PBC ,

$\therefore \vec{DM} \perp \vec{BC}$ 且 $\vec{DM} \perp \vec{BP}$, 所以 $\vec{DM} \cdot \vec{BC} = 0$ 且 $\vec{DM} \cdot \vec{BP} = 0$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 则 } M(1, 1, 1),$$

所以 $\vec{CM} = (-1, -1, 1)$, 又平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{CM}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{CM} \cdot \vec{n}}{|\vec{CM}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore CM$ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$19. (1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(2) \textcircled{1} k = \pm 1; \textcircled{2} \text{存在}, t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$$

【知识点】 根据 a 、 b 、 c 求椭圆标准方程、已知方程求双曲线的渐近线、椭圆中三角形(四边形)的面积、求椭圆中的参数及范围

【分析】 (1) 根据椭圆的定义和点到双曲线渐近线的距离求出椭圆方程;

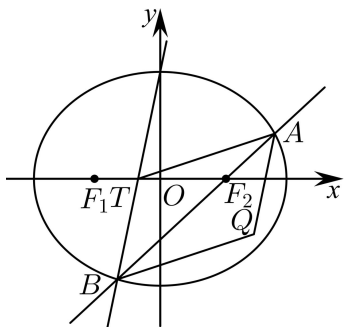
(2) ①联立后根据弦长公式求出弦长再求出面积即可; ②先假设存在, 再根据菱形对角线互相垂直的特点, 转化为斜率问题, 最后求出取值范围.

【详解】(1) 双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的渐近线方程为 $y = \pm x$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a=2 \\ \frac{|c|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2=4 \\ b^2=3 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \end{cases}$$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 如图所示,



$$\text{①联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases}, \text{ 得 } (4k^2+3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = 144k^2 + 144 > 0,$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{144k^2+144}}{4k^2+3} = \frac{12(k^2+1)}{4k^2+3},$$

$$\text{又椭圆左焦点 } F_1 \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AF_1B} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB| = \frac{12\sqrt{k^4+k^2}}{4k^2+3} = \frac{12\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{解得 } k^2 = 1 \text{ (} k^2 = -\frac{18}{17} \text{ 舍去)}, \text{ 所以 } k = \pm 1$$

②假设存在点 $T(t,0)$ 使得以 TA 、 TB 为邻边的平行四边形 $TAQB$ 为菱形,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + 2 \end{cases}, \text{ 可得 } (4k^2+3)x^2 + 16kx + 4 = 0,$$

$$\Delta = 192k^2 - 48 > 0 \text{ 且 } k > 0, \text{ 解得 } k \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 中点 $Q(x_0, y_0)$, 则 $TQ \perp AB$,

$$\text{因为 } x_1 + x_2 = -\frac{16k}{4k^2+3}, x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{8k}{4k^2+3}, y_0 = kx_0 + 2 = \frac{6}{4k^2+3},$$

$$\text{所以 } k_{TQ} = -\frac{1}{k} = \frac{\frac{6}{4k^2+3}}{-\frac{8k}{4k^2+3}-t}, \text{ 整理得 } t = -\frac{2k}{4k^2+3} = -\frac{2}{4k+\frac{3}{k}}$$

$$\text{又 } k \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \text{ 所以 } 4k + \frac{3}{k} \in [4\sqrt{3}, +\infty), \frac{2}{4k + \frac{3}{k}} \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$$

$$\text{所以 } t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right).$$

【点睛】关键点睛：本题的关键点在于将以 TA 、 TB 为邻边的平行四边形为菱形这个条件转化对角线垂直，进而斜率之积（先说明斜率存在）为 -1 的这个条件，就可以应用韦达定理进行求解了。